粒子フィルタにおける分布の裾の近似と探索能力の改善法について

九工大・工　　生駒 哲一

１．はじめに

粒子による非ガウス分布の近似を用いた時系列フィルタリングの手法として，モンテカルロフィルタ [6]，ブートストラップフィルタ [3]，コンデンセーション [4] 等がある．また，これらの手法と遺伝的アルゴリズム [1] との類似性も指摘されている [5]．しかしこれらの手法では，状態の次元が高い場合 [7] や，低次元であっても高速な処理が要求される場合などでは，粒子数が十分に多く取れない状況が起こる．粒子数が不足すると非ガウス分布の裾の近似が特に悪くなるため，粒子から得られる予測分布と，尤度関数との重なりが疎となり [3]，フィルタリング処理のろ波手続きにおいて，十分な探索が行われなくなるという問題 [7] が生じる．

この問題を解決するために，本研究では２種類の解決の方向を提案する．１つめの方向は，システムノイズの分布に対して，モデルで定義した分布よりも裾の重い分布を１期先予測の計算に用いて，探索能力の低下を補う方法である．裾の重い分布の導入には，コーシー分布等で分布の型を明示する方法と，遺伝的アルゴリズム [1] の交叉と呼ばれる操作等の手続き的な方法により裾の重い分布を得る方法の，２種類の方法を提案する．２つめの方向は，状態空間自体を探索に都合の良いものに変換し，探索能力を向上させる方法である．元々連続値を取る状態空間に対して，連続値を取る別の空間に変換する方法と，離散的な値を取る空間に変換する方法の，２種類の方法を提案する．連続値を取る空間への変換は，探索により良い性質を持つ別の空間への変換に相当する．離散値を取る空間への変換とは，遺伝的アルゴリズム [1] における表現型から遺伝子型への変換に相当し，離散的になった遺伝子型の空間において，交叉や突然変異などの遺伝的操作によって，連続値の状態空間では得るのが難しかった新しい粒子を得ることを目的とする方法である．

２．粒子フィルタ

非線形非ガウス型状態空間モデルとして，システムモデルおよび観測モデル

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t), \qquad \mathbf{y}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{w}_t) \tag{1}$$

から成るものを考える．ここで $\mathbf{x}_t$ は時刻 t の p 次元状態ベクトル，$\mathbf{y}_t$ は l 次元の観測ベクトルである．時刻 t までの観測の集合を Y_t と表すとき，この前提の下で，１期先予測の分布 $p(\mathbf{x}_t|Y_{t-1})$ とろ波の分布 $p(\mathbf{x}_t|Y_t)$ を推定するのが状態推定 (フィルタリング) の問題である．

状態推定の近似的方法である粒子フィルタのうち，モンテカルロフィルタ [6] について，その計算手順を以下に示す．まず，状態の分布を次のような M 個の粒子 (実現値) の集合 $\mathbf{P}_t$ および $\mathbf{F}_t$ により近似する．各粒子 $\mathbf{p}_j^{(t)}, \mathbf{f}_j^{(t)}$ は状態の取る値の候補に相当する (それぞれ p 次元ベクトルである)．

$$\mathbf{P}_t = \left\{\mathbf{p}_1^{(t)}, \mathbf{p}_2^{(t)}, \cdots, \mathbf{p}_M^{(t)}\right\} \sim p(\mathbf{x}_t|Y_{t-1}) \qquad \mathbf{F}_t = \left\{\mathbf{f}_1^{(t)}, \mathbf{f}_2^{(t)}, \cdots, \mathbf{f}_M^{(t)}\right\} \sim p(\mathbf{x}_t|Y_t) \tag{2}$$

次に，状態推定の手続きは，まず適切に決めた初期分布に従う粒子の集合 $\mathbf{F}_0$ を乱数により生成し，その後 $t = 1, 2, \cdots$ について，以下の１期先予測とろ波の手続きを交互に適用する．

１期先予測の手続きでは，各粒子に対して，システムモデルに従い，乱数ベクトル $\mathbf{v}_i^{(t)}$ を加える．

$$\mathbf{p}_i^{(t)} = \mathbf{g}(\mathbf{f}_i^{(t-1)}, \mathbf{v}_i^{(t)}) \tag{3}$$

ろ波の手続きでは，まず各粒子の尤度 $\alpha_i^{(t)}$ を，次式のように計算する．

$$\alpha_i^{(t)} = p(\mathbf{y}_t|\mathbf{p}_i^{(t)}) = r\left(\ h^{-1}(\ \mathbf{y}_t\ ,\ \mathbf{p}_i^{(t)}\ )\ \right) \tag{4}$$

ここで式 (1) の $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ には，$\mathbf{w} = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ となる関数 $\mathbf{h}^{-1}(\cdot, \cdot)$ が存在することを前提とする．また $r(\cdot)$ は観測ノイズ $\mathbf{w}_t$ の密度関数である．次に $\mathbf{p}_k^{(t)}$ の選ばれる確率を $\alpha_k^{(t)} / \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(t)}$ としたリサンプリングを行い，$\mathbf{f}_j^{(t)}$ $(j = 1, 2, \cdots, M)$ を得る．

$$\mathbf{f}_j^{(t)} \sim \left\{\mathbf{p}_k^{(t)} \text{ with prob. } \alpha_k^{(t)} / \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(t)}, \quad k = 1, 2, \cdots, M\right\} \tag{5}$$

３．改善法

粒子フィルタでは，高次元の場合 [7] や高速処理が要求される場合などでは，粒子数が十分に多く取れない状況が起こる．粒子数が不足すると非ガウス分布の裾の近似が特に悪くなる．そのため粒子から得られる予測分布と，尤度関数との重なりが疎となり [3]，フィルタリング処理のろ波手続きにおいて，十分な探索が行われなくなるという問題 [7] が生じる．

この問題を解決するために，本研究では２種類の解決の方向を提案する．１つめの方向は，システムノイズの分布に対して，モデルで定義した分布よりも裾の重い分布を１期先予測の計算に用いて，探索能力の低下を補う方法である．２つめの方向は，状態空間自体を探索に都合の良いものに変換し，探索能力を向上させる方法である．

3.1 裾の重いシステムノイズの導入

システムノイズの分布に対して，モデルで定義した分布よりも裾の重い分布を用いて，探索能力の低下を補う．裾の重い分布の導入方法として，分布の型を明示する方法と，手続き的な方法により裾の重い分布を得る方法の２種類を提案する．

一つ目の方法では，例えばモデルでシステムノイズに正規分布を仮定した場合には，その正規分布よりも裾の重い，例えば分布コーシー分布等を，１期先予測の式 (3) における乱数 $\mathbf{v}_t^{(t)}$ の生成に用いる．

二つ目の方法では，遺伝的アルゴリズム [1] において交叉と呼ばれる操作を用いる．交叉の操作とは，２つの個体 (粒子に相当) をランダムに選び，これらの遺伝情報を担うビット列をランダムな箇所で切断して入れ替える方法で，これにより新しい形質をもつ個体を得るものである．フィルタリングでも同様に，ランダムに選んだ二つの粒子について，状態ベクトルのランダムに選んだ要素以降を入れ替える方法を提案する．これまでシステムノイズを印加することで，粒子が状態空間を連続的に移動していたのに対して，この方法では，状態空間に対して連続ではなく，突発的な変化を粒子に対して与えることになり，粒子の集団から遠く離れた新しい粒子を得ることが期待される．また，状態ベクトルの入れ替えに限らず，ランダムに選んだ二つの粒子を結ぶ直線上での外挿も，有効な方法の一つと考えられる．

3.2 状態空間の変更

状態空間を変換することで，状態空間自体を探索に都合の良いものに変更し，探索能力を向上させる．連続値を取る状態空間に対して，連続値を取る別の空間に変換する方法と，離散的な値を取る空間に変換する方法の２種類を提案する．

一つ目の連続値を取る空間としては，例えば自己回帰係数を状態空間として持つ場合には，これを偏自己相関係数に変換したものを状態空間に取ることによって，状態空間は±１の範囲に正規化され，探索にとって都合の良い性質を持つことになる．また自己回帰過程の定常性の保持にも好都合である [2]．

二つ目の，離散的な値の状態空間の取り方としては，遺伝的アルゴリズム [1] に使われる遺伝コードを状態空間にする．具体的には，状態ベクトルをビット列に変換し，遺伝的アルゴリズムにおける交叉や突然変異等の操作を加えて，得られたビット列を再び状態ベクトルに逆変換する．この方法により，遺伝的アルゴリズムの持つ大域的探索性を得ることが期待される．

参考文献

[1] D.E.Goldberg: Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning, Addison-Wesley, (1989).

[2] S.J. Godsil, A.Doucet, and M.West: Methodology for Monte Carlo smoothing with application to time-varying autoregressions, Proc. of the Intl. Sympo. on Frontiers of Time Series Modeling, (CD-ROM), The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo (2000).

[3] N.J.Gordon, D.J.Salmond, and A.F.M.Smith: Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation, IEE Proceedings-F, Vol.140, No.2, pp.107-113(1993).

[4] M.Isard and A.Blake: Condensation – Conditional density propagation for visual tracking, Intl.J.Compter Vision, Vol.29, No.1, pp.5-28(1998).

[5] T.Higuchi: Monte Carlo filter using the Genetic algorithm operators, Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol.59, No.1, pp.1-23(1997).

[6] G.Kitagawa: Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models, *Journal of Computational Graphical Statistics*, **5**, No.1, pp.1-25(1996).

[7] 生駒: モンテカルロフィルタの改良について, 日本統計学会第 67 回大会 論文集，pp.367-368(1999).