時変ＰＡＲＣＯＲを用いた時変次数ベイズモデル

広島市立大学　情報科学部

生駒哲一

1　はじめに

非定常不規則振動データを解析して応用に利用する研究においては，たとえば時変係数ＡＲモデル [2],[6] 等の非定常ＡＲモデルにより非定常スペクトルを推定して，時間と共に変化する周波数領域の性質を捉えることになる．このとき，用いる非定常ＡＲモデルの次数については，時間的に変化しないと仮定する場合と，予め分かっている事実に基づいて変化させる場合とがある．

前者の例としては，地震波の到着時点で恣意的に大きな分散を仮定する [11] ，または裾の重い非ガウス分布を仮定する方法など [7] がある．後者の例としては，地震動データの場合に，局所定常ＡＲモデル [8],[5] や時変係数ＡＲモデルでのデータの分割区間をＡＩＣに基づき決定する方法 [6] がある．これらのどの研究も，次数は一定と仮定してノイズの分布を工夫したものであったり，地震波到着の性質に依存した仮定を設けたりするもので，次数の変化をどちらかと言えば消極的に扱ったものであると言える．

本研究では，次数の変化を積極的に取り込んだベイズモデルを考え，その性質について調べる．具体的には，次数を状態として持つような非線形モデルの定式化を行ない，非線形非ガウス型フィルタリングにより状態推定を行なう方法を提案する．システム方程式として次数の変化の滑らかさの事前分布を仮定する．また観測方程式としては 非定常ＡＲモデルを考え，時変ＡＲ係数は予め与えられるものとする．この時変ＡＲ係数は，ＰＡＲＣＯＲ時変ＡＲモデル [7] によって予め推定された時変なＰＡＲＣＯＲ（偏自己相関係数:Partial Auto-CORrelation coefficient）から算出されるものを用いる．また，推定対象がＡＲ次数であることによるバイアスの修正についても議論する．

このように定式化することで，モデルが特定のデータの性質にあまり依存しないため，データ中で次数が変化するような不規則振動一般について適用が可能ではないかと考えられる．このようなモデルの応用対象は，例えば地震動の観測におけるＰ波やＳ波の到着や，故障診断における破壊等が原因の振動自由度の増加などが挙げられる．

本文では，まず時変ＰＡＲＣＯＲの性質とその推定法を概説し，次に時変次数ベイズモデルを提案する．モデルの推定法には非線形非ガウス型フィルタリング [3] を用い，推定が次数をその対象としていることによるバイアスの修正等について議論する．

2　時変ＰＡＲＣＯＲとその推定

時変ＰＡＲＣＯＲの，隣接する次数に関する逐次的性質と，ＰＡＲＣＯＲ時変ＡＲモデル [7] による推定法を簡単に述べる．

2.1　非定常ＡＲモデルと時変ＰＡＲＣＯＲ

非定常ＡＲモデルと時変ＰＡＲＣＯＲについて述べる．時刻 n についてＡＲ係数の値が変化するような，m 次の非定常ＡＲモデル

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j,n}^{(m)} y_{n-j} + \varepsilon_n,\ \ \varepsilon_n \sim N(0, \sigma_f^2) \tag{1}$$

広島市立大学 情報科学部 情報機械システム工学科　〒731-31 広島市安佐南区大塚東３－４－１
TEL : 082-830-1764, FAX : 082-830-1792　E-mail : ikoma@im.hiroshima-cu.ac.jp

をここでは扱う（$m=1,2,\cdots,M$）．ＰＡＲＣＯＲについて議論する場合には，後ろ向きＡＲモデル

$$y_n=\sum_{j=1}^{m}\gamma_{j,n}^{(m)}y_{n+j}+e_n,\ \ e_n\sim N(0,\sigma_b^2) \tag{2}$$

も同時に考える．

定常ＡＲモデルの場合には，上記二つのモデルから Levinson-Durbin の逐次式が導出できるが，非定常ＡＲモデルの場合には，前向きＡＲ係数 $\alpha_{j,n}^{(m)}$ および後ろ向きＡＲ係数 $\gamma_{j,n}^{(m)}$ の間の次のような関係が得られる．

$$\begin{array}{rcl}\alpha_{j,n}^{(m)} & = & \alpha_{j,n}^{(m-1)}-\alpha_{m,n}^{(m)}\gamma_{m-j,n}^{(m-1)}\\ \gamma_{j,n}^{(m)} & = & \gamma_{j,n}^{(m-1)}-\gamma_{m,n}^{(m)}\alpha_{m-j,n}^{(m)}\end{array} \tag{3}$$

よってこれらを推定するときには次のような逐次的な方法が可能である．次数を $m=1$ から始めて，各 m において時変ＰＡＲＣＯＲ $\alpha_{m,n}^{(m)},\gamma_{m,n}^{(m)}$ を推定し，$j<m$ の各ＡＲ係数 $\alpha_{j,n}^{(m)}$ ，$\gamma_{j,n}^{(m)}$ は次数 $m-1$ のときの推定結果を用いて逐次求めることができる．

2.2　ＰＡＲＣＯＲ時変ＡＲモデル

時変ＰＡＲＣＯＲを推定する方法として，ＰＡＲＣＯＲ時変ＡＲモデル [7] について説明する．

時刻を n で表すとき，時変ＰＡＲＣＯＲの隣り合う時刻の間に，以下のような確率的な滑らさを仮定する [4]（Δ は一階差分演算子）;

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Delta\alpha_{m,n}^{(m)} & = & v_n^{(m)},\\ \Delta\gamma_{m,n}^{(m)} & = & u_n^{(m)}.\end{array}\right. \tag{4}$$

ある次数 m について，次数 $m-1$ のときの推定結果が与えられているとする．次数 m について，式 (1), (2) を観測方程式，式 (4) をシステム方程式とする状態空間モデルを構成する．状態推定により時変 ＰＡＲＣＯＲ $\alpha_{m,n}^{(m)}$ ，$\gamma_{m,n}^{(m)}$ を観測 $\{y_n|n=1,2,\cdots,N\}$ から求めることができる．よって次数 m を，１から順に大きくしてゆくことで，逐次的に時変ＰＡＲＣＯＲを推定することができる．

ここでは観測方程式 (1), (2) のノイズ項の分散 σ_f^2,σ_b^2 は，データを予め分散標準化しておく等により，既知であると仮定する．またシステム方程式 (4) のノイズ項 $v_n^{(m)}$, $u_n^{(m)}$ は，例えば正規分布

$$v_n^{(m)}\sim N(0,\tau_m^2),\ \ u_n^{(m)}\sim N(0,\mu_m^2),$$

に従うとしたり，突然の大きな変化のある場合には Cauchy 分布等を定義したりする．状態推定の方法は，これらノイズの分布の仮定に依存して，正規分布ならばカルマンフィルタ，非ガウス分布ならば非ガウス型フィルタを用いる．このとき超パラメータ τ_m^2, μ_m^2 等の値は，尤度を最大にするように求めるものとする．

3　時変次数ベイズモデル

前節の方法により予め推定された時変ＰＡＲＣＯＲを用いて，次数が時変となるベイズモデルとその推定法を提案する．

3.1　モデル

時変次数ベイズモデルとして，次の観測方程式とシステム方程式の組から成るモデルを提案する．

$$\left\{\begin{array}{l} y_n=\sum_{j=1}^{p_n}\alpha_{j,n}^{(p_n)}y_{n-j}+\varepsilon_n,\ \ \varepsilon_n\sim N(0,\sigma^2)\\ \Delta p_n=w_n,\qquad\quad w_n\sim q(\cdot|\theta)\end{array}\right. \tag{5}$$

ここで，時変ＡＲ係数 $\alpha_{j,n}^{(p)}$ は，前節の方法により予め推定しておいたものを用いる．

モデル (5) の状態 p_n はＡＲ次数，すなわち

$$p_n \in \{0, 1, 2, \cdots, M\}$$

であり，このように p_n が離散的な値をとることから，分布 $q(\cdot|\theta)$ は状態遷移行列

$$\theta = \left[\begin{array}{c} \\ \theta_{ij} \\ \\ \end{array} \right], \qquad \begin{array}{l} i = 0, 1, 2, \cdots, M \\ j = 0, 1, 2, \cdots, M \end{array}$$

で表すことができる．ここで $\theta_{ij} \geq 0$ は， $p_{n-1} = i$ から $p_n = j$ への遷移確率とする．すなわち

$$\sum_{j=0}^{M} \theta_{ij} = 1, \ \ i = 0, 1, 2, \cdots, M.$$

状態遷移行列について，遷移確率は，遷移元の状態によらず，遷移元の次数 p_{n-1} と遷移先の次数 p_n との差のみにより決まると仮定して良い場合には，

$$\theta_{ij} = \vartheta_{|i-j|} / \sum_{j=0}^{M} \vartheta_{|i-j|}$$

とし， $\vartheta_k, \ \ k = 0, 1, 2, \cdots, M$ についてのみを考えれば良いことになる．この場合には， ϑ の分布としては，例えばポアソン分布 $\vartheta_k = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ や，小さな確率で他の次数に遷移するような分布（$\vartheta_0 = \lambda_1, \ \ \vartheta_k = \lambda_2, \ \ \mathrm{for}\ k > 0, \lambda_1 > \lambda_2$）等が考えられる．

3.2 推定法とバイアス修正

モデル (5) は非線形であるので，非ガウス型フィルタリング [3] を用いる．このとき，状態が次数のように離散的な値であることから，推定方法は隠れマルコフモデルにおけるいくつかのアルゴリズム [12] と深い関連がある．例えば尤度の計算は，前向きパスアルゴリズムと同じであり，またフィルタリングは最適状態列推定アルゴリズム（Viterbi アルゴリズム）と関連がある．そしてスムージング（固定区間）は，Forward-Backward アルゴリズムと等価である．

状態推定において，モデルの次数を状態としていることから，以下の点を留意する必要がある．シミュレーション実験のような，真のモデルがＡＲモデルである場合に，ＡＲモデルの次数決定をＡＩＣ [1] により行なうと，真の次数よりも大きな次数を選択する傾向がある [9]．一方， 次数の一致する基準として Schwarz のＢＩＣ [10] 等がある．

具体的には，データを $Y_N = (y_1, y_2, \cdots, y_N)$ と表すとき，非ガウス型フィルタリングにおけるフィルタリングの式

$$\begin{aligned} p(p_n|Y_n) &= \frac{p(y_n|p_n)p(p_n|Y_{n-1})}{p(y_n|Y_{n-1})} \\ p(y_n|Y_{n-1}) &= \sum_{j=0}^{M} p(y_n|j)p(j|Y_{n-1}) \end{aligned} \tag{6}$$

における $p(y_n|p_n)$ がバイアスを持つと考えられるので，それを修正したものを用いる．ＡＩＣやＢＩＣに基づく修正としては，次数 p_n が時間的に変化しない場合（$p_n = p$）には

$$\begin{aligned} \text{ＡＩＣ} &= -2 \sum_{n=1}^{N} \log p(y_n|\hat{p}) + 2\hat{p} \\ \text{ＢＩＣ} &= -2 \sum_{n=1}^{N} \log p(y_n|\hat{p}) + \frac{\hat{p}}{N} \log N \end{aligned} \tag{7}$$

であることから，これらを $1/N$ した値を用いる．すなわち $p(y_n|p_n)$ の代わりに，

$$
\begin{aligned}
&\text{ＡＩＣ：} \quad \exp\left\{\log p(y_n|p_n) - \frac{p_n}{N}\right\} \\
&\text{ＢＩＣ：} \quad \exp\left\{\log p(y_n|p_n) - \frac{p_n}{2N}\log N\right\}
\end{aligned} \tag{8}
$$

をそれぞれ用いる．

4　解析例

シミュレーションおよび実データの解析例と，提案方法の特徴や問題点等は，口頭発表にて報告する．

謝辞　本研究は，文部省科学研究費補助金奨励研究（Ａ）の補助を受けています．

参考文献

[1] Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. A.C.*,**19**, No.6, 716-723.

[2] Kitagawa, G. (1983). Changing spectrum estimation, *Journal of Sound and Vibration*, **89**,No.3, 433-445.

[3] Kitagawa, G. (1987). Non-Gaussian State-Space Modeling of Nonstationary Time Series(with discussion), *Journal of the American Statistical Association*, **82**,No.400, 1032-1063.

[4] Kitagawa, G. (1988). Numerical approach to non-Gaussian smoothing and its applications, 20th Interface Symposium Computer Science and Statistics, 379-388.

[5] Kitagawa, G. and Akaike, H. (1978). A procedure for the modeling of non-stationary time series, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **30**,Part B,351-363.

[6] Kitagawa, G. and Gersch, W. (1985). A Smoothness Priors Time-Varying AR Coefficient Modeling of Nonstationary Covariance Time Series, *IEEE Trans.* **AC-30**, No.1, 48-56.

[7] Kitagawa, G. and Gersch, W. (1996). Smoothness Priors Analysis of Time Series, Lecture Notes in Statistcs, Springer-Verlag, New York, Chapter 11, 147-160.

[8] Ozaki, T. and Tong, H. (1975). On the fitting of non-stationary autoregressive models in time series analysis, *Proceeding of the 8th Hawaii International Conference on System Sciences*, 224-226.

[9] Shibata, R. (1976). Selection of the order of an autoregressive model by Akaike's information criterion, *Biometrika*, **63**, No.1, 117-126.

[10] Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model, *The Annals of Statistics*, **6**, No.2, 461-464.

[11] 北川源四郎 (1986). 時変係数自己回帰モデル – プログラムＴＶＣＡＲの紹介 –, 統計数理，第３４巻，第２号，273-283．

[12] 電子情報通信学会編 (1988). 確率モデルによる音声認識, コロナ社, 29-67.