時変次数モデルと構造変化の推定

広島市立大学　情報科学部
生駒哲一

1　はじめに

本研究では，不規則振動する対象の構造変化を，時間的に変化するＡＲ次数に基づき推定する次の様な方法を提案する．予め各次数ごとに推定しておいた時変ＡＲ係数を使って，ＡＲ次数が時変な時変係数ＡＲモデル考える．その時変次数を状態として持つような非線形状態空間モデルを構成し，非線形非ガウス型フィルタリングにより状態推定を行ない，時変次数を推定する．時変次数の推定にあたっては，次数は基本的に一定であるが，観測対象に構造的な変化のあった場合には次数が変化するという想定で，次数変化の滑らかさを規定する分布を設計しておく．このようにして推定されたＡＲ次数の変化から，観測対象の構造変化の時刻と，各々時刻での振動の複雑さとそのスペクトルが分かると考えられる．このようなモデルの応用対象は，例えば地震動の観測におけるＰ波やＳ波の到着や，故障診断における破壊等が原因の振動自由度の増加などが挙げられる．

本文では，提案手法の説明として，まず時変ＰＡＲＣＯＲの推定法 [4] を概説し，次に時変次数モデルの提案とその推定法を説明する．また，推定が次数をその対象としていることによるバイアスの修正等についても議論する．そこでは定常ＡＲ過程のシミュレーションによりバイアス修正の確認を行ない，未だ残っているバイアスを，修正項を r 倍する改良で補う方法を提案する．実データの解析例として，地震波データへの適用結果を報告する．

2　提案手法

2.1　時変ＰＡＲＣＯＲの推定

時刻 n について観測を y_n とするとき，m 次の前向き時変係数ＡＲモデルおよび後ろ向きモデルをそれぞれ次のように表す（$m = 1, 2, \cdots, M$）．

$$\left\{ \begin{array}{lcll} y_n & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_{j,n}^{(m)} y_{n-j} + f_n^{(m)}, & f_n^{(m)} \sim N(0, (\sigma_f^{(m)})^2) \\ y_n & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \gamma_{j,n}^{(m)} y_{n+j} + b_n^{(m)}, & b_n^{(m)} \sim N(0, (\sigma_b^{(m)})^2) \end{array} \right. \tag{1}$$

このとき前向きイノベーション $f_n^{(m)}$ および後向きイノベーション $b_n^{(m)}$ には，次のような関係が成り立つ．

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_n^{(m)} & = & f_n^{(m-1)} - \alpha_{m,n}^{(m)} b_{n-m}^{(m-1)} \\ b_n^{(m)} & = & b_n^{(m-1)} - \gamma_{m,n}^{(m)} f_{n-m}^{(m-1)} \end{array} \right. \tag{2}$$

ただし，$f_n^{(0)} = b_n^{(0)} = y_n$ ．

よって，次数 $m-1$ のときの推定結果を使って，次数 m のときの時変ＰＡＲＣＯＲ $\alpha_{m,n}^{(m)}, \gamma_{m,n}^{(m)}$ を式 (2) に基づき逐次推定すれば，全ての次数についての時変ＰＡＲＣＯＲを求めることができる．

広島市立大学 情報科学部 情報機械システム工学科　〒 731-31 広島市安佐南区大塚東３－４－１
TEL：082-830-1764, FAX：082-830-1792　E-mail：ikoma@im.hiroshima-cu.ac.jp

時変ＰＡＲＣＯＲの推定には，その隣り合う時刻の間に，以下のような確率的な滑らさを仮定する [3] (Δ は一階差分演算子) ;

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Delta\alpha_{m,n}^{(m)} & = & v_n^{(m)}, \\ \Delta\gamma_{m,n}^{(m)} & = & u_n^{(m)}. \end{array} \right. \tag{3}$$

式 (2) を観測方程式，式 (3) をシステム方程式として状態空間モデルを構成すれば，時変ＰＡＲＣＯＲを状態推定により求めることができる．

時変ＰＡＲＣＯＲからつぎのような手続きで時変ＡＲ係数を求める．前向きＡＲ係数 $\alpha_{j,n}^{(m)}$ および後ろ向きＡＲ係数 $\gamma_{j,n}^{(m)}$ の間には，次のような関係がある．

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_{j,n}^{(m)} & = & \alpha_{j,n}^{(m-1)} - \alpha_{m,n}^{(m)}\gamma_{m-j,n}^{(m-1)} \\ \gamma_{j,n}^{(m)} & = & \gamma_{j,n}^{(m-1)} - \gamma_{m,n}^{(m)}\alpha_{m-j,n}^{(m)} \end{array} \right. \tag{4}$$

この関係式を用いて，次数 $m = 1,2,\cdots,M$ の時変ＰＡＲＣＯＲから次数 M までのすべての時変ＡＲ係数を求めることができる．

2.2　時変次数モデル

時変次数モデルとして，次の観測方程式とシステム方程式の組から成るモデルを提案する．

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_n = \sum_{j=1}^{p_n} \alpha_{j,n}^{(p_n)} y_{n-j} + \varepsilon_n, & \varepsilon_n \sim N(0,\sigma^2) \\ \Delta p_n = w_n, & w_n \sim q(\cdot|\theta) \end{array} \right. \tag{5}$$

ここで，時変ＡＲ係数 $\alpha_{j,n}^{(p)}$ は，前節の方法により予め推定しておいたものを用いる．

モデル (5) の状態 p_n はＡＲ次数，すなわち $p_n \in \{0,1,2,\cdots,M\}$ であり，このように p_n が離散的な値をとることから，分布 $q(\cdot|\theta)$ のパラメータ θ は，$p_{n-1} = i$ から $p_n = j$ への遷移確率を θ_{ij} とする状態遷移行列 ($i,j = 0,1,2,\cdots,M$) で表すことができる．また状態遷移確率であることから，遷移先についての和は 1 である，すなわち，$\sum_{j=0}^{M} \theta_{ij} = 1$ ．

このとき遷移確率が，遷移元の状態によらず，遷移元の次数 p_{n-1} と遷移先の次数 p_n との差のみにより決まると仮定して良い場合には，

$$\theta_{ij} = \vartheta_{|i-j|} / \sum_{j=0}^{M} \vartheta_{|i-j|}$$

とし，$\vartheta_k,\ k = 0,1,2,\cdots,M$ のみを決めれば良いことになる．この場合には，ϑ の分布としては，例えばポアソン分布 $\vartheta_k = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ が考えられる．また，大きな確率 λ_1 で同じ次数にとどまり，小さな確率 λ_2 で他の次数に遷移するような分布 ($\vartheta_0 = \lambda_1,\ \vartheta_k = \lambda_2,\ \text{for } k > 0, \lambda_1 > \lambda_2$) なども考えられる．

2.3　推定法とバイアス修正

モデル (5) は，状態 p_n が観測 y_n について非線形であるので，状態推定には非ガウス型フィルタリングが必要である．非ガウス型フィルタリング法としては，状態の非ガウス分布を区分的に数値近似する方法 [2] を用いる．この方法は，状態が連続型確率変数の場合には近似的方法であるが，ここでは状態は次数のように離散型確率変数なので，想定した次数 M までの厳密な状態推定となっている．

状態推定において，モデルの次数を状態としていることから，以下の点を留意する必要がある．シミュレーション実験のような，真のモデルがＡＲモデルである場合に，ＡＲモデルの次数決定をＡＩＣ [1] に

より行なうと，真の次数よりも大きな次数を選択する傾向がある [5]．一方， 次数の一致する基準として Schwarz のＢＩＣ [6] 等がある．

具体的には，データを $Y_N = (y_1, y_2, \cdots, y_N)$ と表すとき，非ガウス型フィルタリングにおけるフィルタリングの式

$$\begin{aligned} p(p_n|Y_n) &= \frac{p(y_n|p_n)p(p_n|Y_{n-1})}{p(y_n|Y_{n-1})} \\ p(y_n|Y_{n-1}) &= \sum_{j=0}^{M} p(y_n|j)p(j|Y_{n-1}) \end{aligned} \tag{6}$$

における $p(y_n|p_n)$ がバイアスを持つと考えられるので，これに修正を施す．

バイアス修正は，次のような方法を基本とする．次数 p_n が時間的に変化しない場合（$p_n = p$）には，ＡＩＣやＢＩＣに基づく $-2N \times$（平均対数尤度）のバイアス修正

$$\begin{aligned} \text{ＡＩＣ} &= -2\sum_{n=1}^{N} \log p(y_n|\hat{p}) + 2\hat{p} \\ \text{ＢＩＣ} &= -2\sum_{n=1}^{N} \log p(y_n|\hat{p}) + \frac{\hat{p}}{N}\log N \end{aligned} \tag{7}$$

が，そのまま $p(y_n|p_n)$ のバイアス修正になっていると考えられる．しかし今考えているモデルでは p_n が時間的に変化するので，時刻 n ごとに個別にバイアス修正を行なわなければならない．そこで素朴な方法として，平均対数尤度のバイアス修正を $1/(-2N)$ した値を用いて， $p(y_n|p_n)$ の代わりに，

$$\begin{aligned} \text{ＡＩＣ：} &\quad \exp\left\{\log p(y_n|p_n) - \frac{p_n}{N}\right\} \\ \text{ＢＩＣ：} &\quad \exp\left\{\log p(y_n|p_n) - \frac{p_n}{2N}\log N\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

をそれぞれ用いることにする．

2.4　定常シミュレーションによるバイアス修正の確認と改良

前述のバイアス修正法が正しく動作するかどうかを，定常ＡＲ過程のシミュレーションにより確認を行なった．

まず，線形合同法による一様乱数から， Box-Muller 法により $N(0,1)$ の正規乱数を生成し，データ数 300 の $\mathrm{AR}(2)$, $\mathrm{AR}(3)$, $\mathrm{AR}(4)$ の系列をそれぞれ次のような条件で用意した．

$$\begin{aligned} &\alpha_1^{(2)} = 1.4, \quad \alpha_2^{(2)} = -0.9 \\ &\alpha_1^{(3)} = 1.2, \quad \alpha_2^{(3)} = -0.8, \quad \alpha_3^{(3)} = 0.4 \\ &\alpha_1^{(4)} = 0.8, \quad \alpha_2^{(4)} = -0.4, \quad \alpha_3^{(4)} = 0.2, \quad \alpha_4^{(4)} = -0.3 \end{aligned}$$

これらのデータに対して提案モデルをあてはめ，時変次数の推定結果を行なった．その結果，バイアス修正なし，ＡＩＣによる修正，ＢＩＣによる修正の全てについて，真のＡＲ次数に収束する訳ではないことがわかった． $\mathrm{AR}(2)$ のデータについて，バイアス修正の無い場合の推定結果を図 1 に，ＡＩＣに基づくバイアス修正の推定結果を 図 2 に, そして，ＢＩＣに基づくバイアス修正の推定結果を 図 3 にそれぞれ示す．結果は全てスムージングの推定で，確率の最も大きい次数（すなわちモード）をプロットしている．結果をみると，全ての場合について真の次数よりも高い推定結果となっているが，このうち少なくともＢＩＣによる修正は，真のＡＲ次数に一致することが望まれる．

真の次数より高い推定結果となるということは，バイアス修正がまだ不足しているのではないかと考えられる．そこで本研究では，ＢＩＣの修正項を r 倍する改良を行ない，真の次数が推定されるような r の値を実験的に求めてみることにした．その結果 $r = 2.4$ の値を得た．このときのシミュレーション結果を図 4, 5, 6に示す．

3　実データの解析

地震データの解析例を報告する．用いたデータを図 7 に示す．予め，時変分散モデル等を用いて分散標準化をしておく [7]．このモデルで推定された時変分散を図 8 に，得られた分散標準化後系列を図 9 に示す．

$r = 2.4$ による改良ＢＩＣによるバイアス修正にて推定された時変次数を，図 10 に示す．結果はシミュレーションの時と同様，スムージングの推定結果のモードをプロットしたものである．推定された次数は，時刻 n が 562 のときと 924 のときに切り替わっている．一方地震データの振幅が大きく変化した時刻から，時刻 635 のときにＰ波が到着し，1030 のときにＳ波が到着していると判断できる．これらを比較すると，やや早い時刻からではあるが，地震の各波の到着に応じてＡＲ次数が変化しており，地震波到着前では８，Ｐ波のときは４，Ｓ波のときは６という推定結果を得た．

推定された時変次数に基づき，非定常スペクトルのプロットを図 11 に示す．また比較のため，次数８のときのスペクトルを図 12 に示す．

謝辞

本研究は，文部省科学研究費補助金奨励研究（Ａ）の補助を受けています．

参考文献

[1] Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. A.C.*,**19**, No.6, 716-723.

[2] Kitagawa, G. (1987). Non-Gaussian State-Space Modeling of Nonstationary Time Series(with discussion), *Journal of the American Statistical Association*, **82**,No.400, 1032-1063.

[3] Kitagawa, G. (1988). Numerical approach to non-Gaussian smoothing and its applications, 20th Interface Symposium Computer Science and Statistics, 379-388.

[4] Kitagawa, G. and Gersch, W. (1996). Smoothness Priors Analysis of Time Series, Lecture Notes in Statistcs, Springer-Verlag, New York, Chapter 11, 147-160.

[5] Shibata, R. (1976). Selection of the order of an autoregressive model by Akaike's information criterion, *Biometrika*, **63**, No.1, 117-126.

[6] Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model, *The Annals of Statistics*, **6**, No.2, 461-464.

[7] 北川源四郎 (1986). 時変係数自己回帰モデル − プログラムＴＶＣＡＲの紹介 −, 統計数理，第３４巻，第２号，273-283．

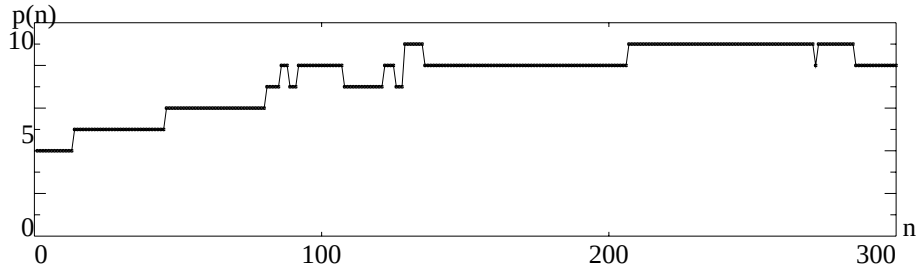

図 1: シミュレーション $(\mathrm{AR}(2))$：バイアス修正なし (スムージング)

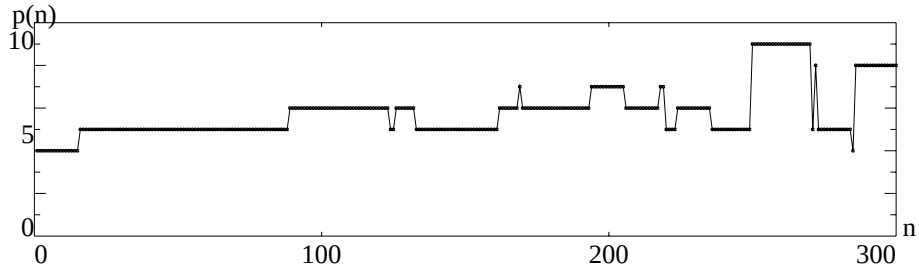

図 2: シミュレーション $(\mathrm{AR}(2))$：ＡＩＣに基づくバイアス修正 (スムージング)

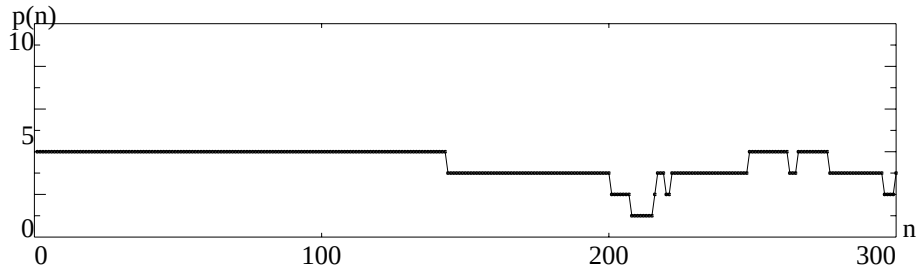

図 3: シミュレーション $(\mathrm{AR}(2))$：ＢＩＣに基づくバイアス修正 (スムージング)

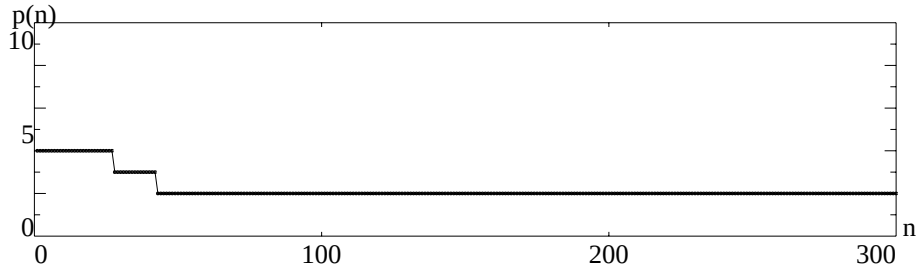

図 4: シミュレーション $(\mathrm{AR}(2))$： $r = 2.4$ での改良ＢＩＣに基づくバイアス修正（スムージング）

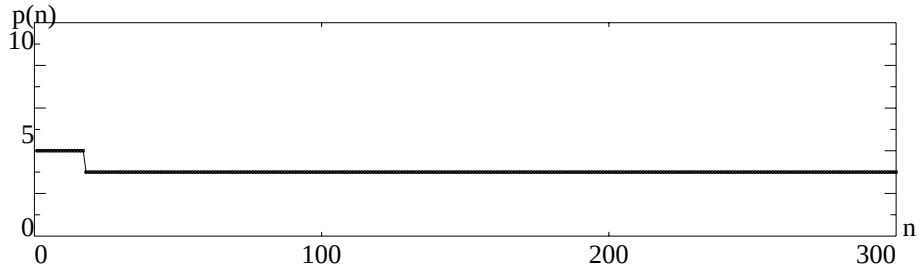

図 5: シミュレーション $(\mathrm{AR}(3))$： $r = 2.4$ での改良ＢＩＣに基づくバイアス修正（スムージング）

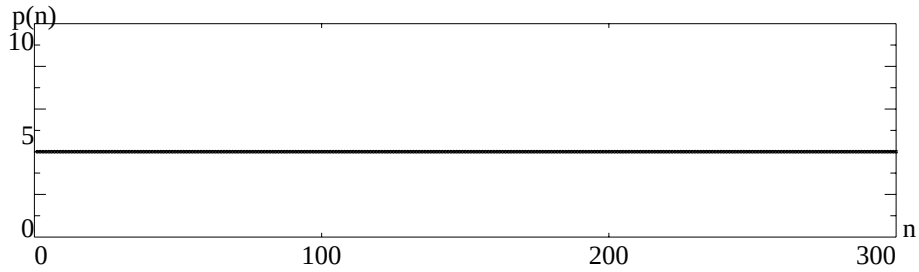

図 6: シミュレーション $(\mathrm{AR}(4))$： $r = 2.4$ での改良ＢＩＣに基づくバイアス修正（スムージング）

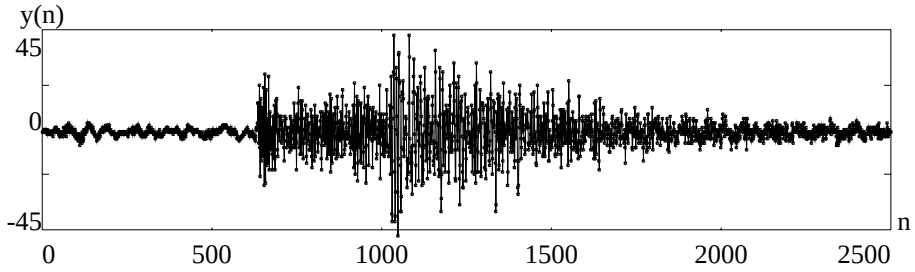

図 7: 地震データ (原データ)

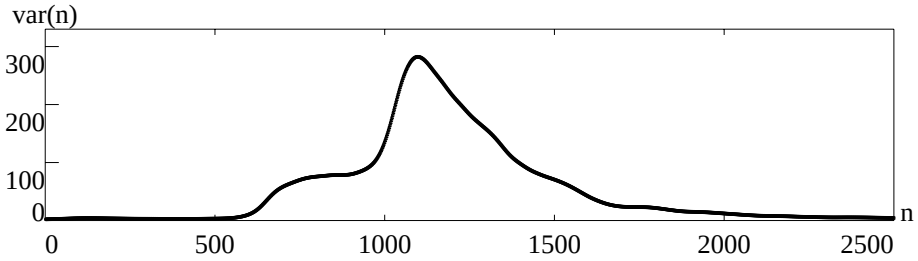

図 8: 推定された時変分散)

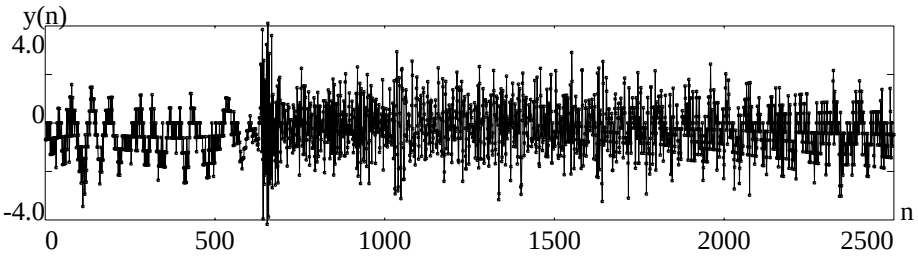

図 9: 地震データ (分散標準化後)

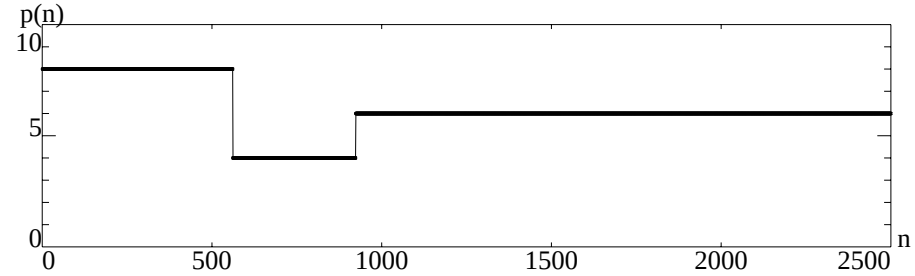

図 10: 地震データ： $r = 2.4$ での改良ＢＩＣに基づくバイアス修正 (スムージング)

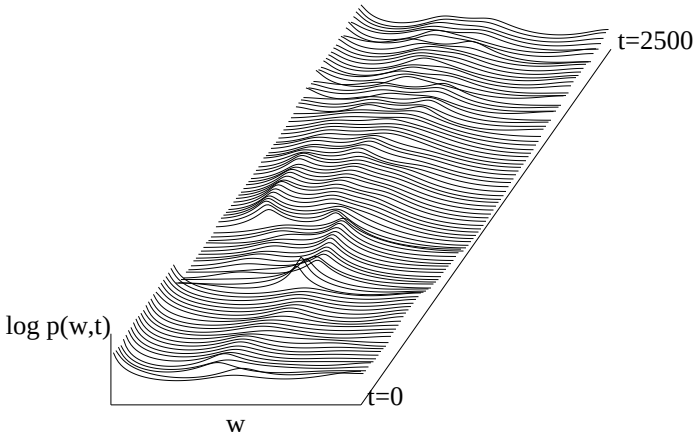

図 11: 地震データ：時変次数モデルによる非定常スペクトルの推定結果

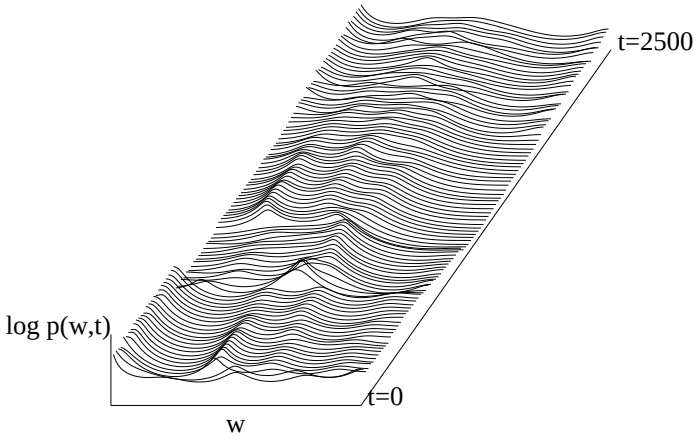

図 12: 地震データ：次数 8 のときの時変係数ＡＲモデルによる非定常スペクトルの推定結果