

モンテカルロフィルタによる非定常スペクトルのピーク推定

生駒 哲一

九州工業大学 工学部 電気工学科
北九州市戸畑区仙水町 1 - 1

Estimation of nonstationary spectral peaks based on Monte Carlo filter

Norikazu Ikoma

Kyushu Institute of Technology,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kita-Kyushu, 804-8550 Japan
E-mail: ikoma@comp.kyutech.ac.jp

Abstract A method of estimating multiple peaks of a nonstationary power spectrum using time-varying peak frequencies of the power spectrum (TVPP) model is reported. Although the TVPP model has the advantage of estimating the frequency of spectral peaks directly, the conventional research on the model has a significant limitation with respect to the number of peaks, due to the computational complexity. In this paper, the limitation of the number of peaks is lessened with the aid of Monte Carlo filtering (MCF) proposed by Kitagawa (1996). The reason for the relaxation depends on the idea that in MCF the estimation of non-Gaussian distribution is approximated by the realizations sampled from the distribution. Compared with the non-Gaussian nonlinear state space (NGS) modeling used in the conventional research, the computational cost is reduced from the exponential order of peak numbers to the order of the number of realization particles. For the extension of peaks, the TVPP model has been modified due to the two kinds of unidentifiability of the peaks. The efficiency of the model has been checked in simulational experiments. Comparison to the conventional model has also been done in the experiment.

Keywords: Nonstationary spectrum, AR model, peak frequency

1. はじめに

非定常不規則振動データの解析において、非定常スペクトルの推定は重要な課題であり、さまざまな方法が提案されている。その中でもパワースペクトルのピーク周波数を推定する問題は、非常に重要である。これらのデータ解析の応用分野は広く、構造物の解析や地震動の解析、音声認識等に用いられている。

非定常スペクトルの推定方法として、係数が時間

的に変化する自己回帰 (AR : autoregressive) モデルを基本とする方法は、尤度に基づく客観的なデータ解析が可能で、他の恣意的パラメータを含む方法に比べ有効である。これら自己回帰モデルを基本とする方法には、局所定常 AR モデル [15], その隣接する区間に滑らかさを仮定した方法 [16], 時変係数 AR モデル [5],[12], および、時変ピーク周波数モデル [4] 等がある。これらのモデルのように、AR 係数が時間的に変化する意味での非定常さを扱ったモデルを「非定常 AR モデル」とここでは呼ぶこと

にする。各モデルの違いは、AR 係数の時間的変化に対する滑らかさの制約の入れ方が異なっている点である。

これらのモデルのうち、時変係数 AR モデル (TVCAR : time-varying coefficient AR) Kitagawa(1983) [5] および Kitagawa and Gersch (1985) [12] は、AR 係数に対して直接的に時間的滑らかさを仮定している。この滑らかさの仮定によって、推定される非定常スペクトルの時間的滑らかさが定義され、それにはパワースペクトルの時間変化を全周波数領域において積分した値が小さくなるという性質がある。一方、著者の提案している時変ピーク周波数モデル (TVPP : time-varying peak frequencies of power spectrum) は、時間的に変化するピーク周波数に対して滑らかさを仮定している [4]。そのため、解析者の着目しているピーク周波数を、直接的に推定できるようになっている。このような直接的な定式化の方が、時変係数 AR モデルのように AR 係数から間接的にピーク周波数を求めるよりも、データ解析の目的より適したものとなっている。

しかし時変ピーク周波数モデルは、その定式化が非線形でなされている。時変係数 AR モデルは線形であり、カルマンフィルタ等を用いて推定が可能であり、計算量も少なかったが、時変ピーク周波数モデルの推定には非線形非ガウス型フィルタの手法を用いる必要がある。非ガウス型フィルタの計算量は、ピークの数によって増大し、非ガウス分布を階段関数や区分的線形関数で近似する方法 [7], [8] では、その計算量が指数関数的に増大してしまい、少数のピークの場合しか実際的には計算できない。既存の研究では、ピーク数はせいぜい 2 までであった [4]。

本論文では、Kitagawa (1996) [9] によって提案されているモンテカルロフィルタを用いることで、このピーク数の計算量的な制約を緩和する。モンテカルロフィルタにより制約が緩和される理由は、非ガウス分布に従う粒子により計算を行うため、計算量が粒子数のオーダーで済むからである。これは、非線形非ガウス型フィルタリング [7],[8] では計算量がピーク数の指数関数のオーダーであったのに比べ、大幅に計算コストが低減したことになる。

また多数のピークを扱うようになったことで、これまで特に問題として意識されなかったピークの多義性の問題が明確となった。多義性は 2 種類ある。

一つは、複数あるパラメータが、どのピークを表すかについて、一意に定まらない点である。もう一つの多義性は、周波数が時間変化しない複数のピークによって、それらの強度が変化する形で、一つの時変ピークが表現されてしまう点である。本論文では、これら二つの多義性を避けるために、モデルの改良を行った。最初の多義性については、ピークパラメータのリパラメトリゼーションを行い、二つ目については、ピーク強度の下限を設けるようにした。

論文の構成は次のようである。まずはじめに [4] に従って、時変ピーク周波数モデルの定義を示す。次に上述した二つの多義性を避けるための時変ピーク周波数モデルの改良について述べる。ここでは、既存のモデルである時変係数 AR モデルとの、時間的滑らかさの仮定の違いについて強調しておくことにする。次に、モンテカルロフィルタ [9] について簡単にまとめておく。そして、数値シミュレーション実験による提案モデルの有用性の確認を行った結果について報告する。ここでは時変係数 AR モデルとの性能比較を、AIC およびピーク周波数の誤差の二乗平均について行った。また計算量と推定精度についても、既存の方法との比較を行った。

2. 時変ピーク周波数モデル

ここでは [4] に基づき、時変ピーク周波数モデルの定式化を行う。文献中で述べられている、スペクトルの非定常成分のみを扱った「基本モデル」(original model) に限定し、定常成分を含む定式化については触れない。まずはじめに、非定常 AR モデルとそのスペクトルを定義する。なお、ここでいう非定常とは、AR 係数が時間的に一定 (すなわち定常) では無いことを意味する。そして、時変ピーク周波数モデルとその改良について述べる。時変ピーク周波数モデルと時変係数 AR モデルとの違いについても述べる。

2.1 非定常 AR モデルとパワースペクトル

次のような AR モデルを考え、これを非定常 AR モデルと呼ぶことにする。

非定常 AR モデル

$$y_t = \sum_{j=1}^p a_j^{(t)} y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

ここで、整数 t は時刻を表し、 y_t は観測を表す。また $\{a_j^{(t)} | j = 1, \dots, p\}$ は時変 AR 係数、そして ε_t は平均 0、分散 σ^2 の正規分布に従う互いに独立な確率変数である。ここで、AR 次数 p は偶数、すなわち $p = 2m$ であると仮定する。

非定常 AR モデルのパワースペクトル(瞬間パワースペクトル)は、次のように定義される。これは、係数時不変の AR モデルの、自然な拡張として得られる。

$$p(\omega, t) = \frac{\sigma^2}{\left| 1 - \sum_{j=1}^p a_j^{(t)} e^{-ij\omega} \right|^2}, \quad (2)$$

ここで $\omega \in [0, \pi]$ は角周波数である。

分散 σ^2 が既知のとき、AR パラメータ

$$\{a_j^{(t)} | j = 1, \dots, p\}$$

により、非定常スペクトルは全て記述されるので、非定常スペクトルの推定には基本的にはこれらの AR パラメータを推定すればよい。しかし、そのパラメータ数は、 $p \times (\text{観測の数})$ となり、これは観測の数よりも多い。推定には後で述べるような時間的滑らかさの導入が必要である。

2.2 時変ピーク周波数モデルの定義

時変ピーク周波数モデルは、非定常 AR モデルの時変 AR 係数 $a_j^{(t)}$ を、以下で述べるような特性方程式の根により表現する。特性方程式の根は、パワースペクトルのピーク周波数に対応している。この根に、時間的滑らかさを導入することで、パワースペクトルのピークが時間的に滑らかに変化するモデルが定式化できる。このような定式化により、パワースペクトルの時変ピークを直接的に推定することが可能となる。

まず、時変 AR 係数とその特性根との関係について述べる。 $zy_t = y_{t-1}$ となるような z -演算子を使って、式 (11) の非定常 AR モデルの特性方程式は次のように書ける。

$$1 - \sum_{j=1}^p a_j^{(t)} z^j = 0. \quad (3)$$

特性方程式の根は全て複素共役であると仮定し、 \tilde{z}_k により表す。このとき根の逆数は次のように表される。

$$\tilde{z}_k^{-1} = r_k(t) e^{\pm i\theta_k(t)}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4)$$

係数が時不変な AR モデルの場合、定常時系列の解析においてはモデルの定常性 $r_k < 1$ ($k = 1, \dots, m$) が必要であるが、係数が時変となる時変ピーク周波数モデルの場合にも、同様の条件 $r_k(t) < 1$ を仮定するものとする。よって特性根の値の取り得る範囲は、 $0 < r_k(t) < 1$ および $0 < \theta_k(t) < \pi$ である。

特性根を

$$c_{2k-1}^{(t)} = r_k(t) e^{i\theta_k(t)}, \quad c_{2k}^{(t)} = r_k(t) e^{-i\theta_k(t)} \quad (5)$$

と表すと、

$$\prod_{j=1}^p (1 - c_j^{(t)} z^j) = 1 - \sum_{j=1}^p a_j^{(t)} z^j \quad (6)$$

となるので、これを解いて AR 係数は、

$$\begin{cases} a_1^{(t)} = \sum_{j_1} c_{j_1}^{(t)} \\ a_2^{(t)} = - \sum_{j_1, j_2} c_{j_1}^{(t)} c_{j_2}^{(t)} \\ \vdots \\ a_j^{(t)} = \epsilon(j) \sum_{j_1, j_2, \dots, j_j} c_{j_1}^{(t)} c_{j_2}^{(t)} \dots c_{j_j}^{(t)} \\ \vdots \\ a_p^{(t)} = - \prod_{j=1}^p c_j^{(t)} \end{cases} \quad (7)$$

のように、特性根によって表される。ただし上記における \sum_{j_1, \dots, j_j} では、 j_1, \dots, j_j の値は $1, \dots, p$ において、全ての j が異なる値をとる範囲について和をとるものとする。また $\epsilon(j)$ は、 j が奇数のとき 1、偶数のときは -1 をとる。

時変ピーク周波数モデルでは、時変な AR 係数を表しているピークパラメータ $r_k(t)$ と $\theta_k(t)$ について、次のような時間的滑らかさを仮定する。

$$\begin{aligned} \Delta^d r_k(t) &\sim N(0, \mu_k^2), \\ \Delta^d \theta_k(t) &\sim N(0, \tilde{\tau}_k^2), \end{aligned} \quad (8)$$

ここで Δ^d は時間についての差分演算子であり、次のように定義される。

$$\begin{aligned} \Delta y_t &\equiv y_t - y_{t-1}, \\ \Delta^d y_t &\equiv \Delta(\Delta^{d-1} y_t), \quad d > 0. \end{aligned}$$

これらは、実際のデータ解析では $d = 1, 2$ 程度を用いる。

このように、ピークの強度に相当する $r_k(t)$ と、周波数 $\theta_k(t)$ とに対して、その時間変化 (d 階差分) がある分布に従うという形で滑らかさを仮定する。

次数が2のARモデル(これをAR(2)と表す)の場合には、式(4)の特性根の偏角 θ はパワースペクトルのピーク周波数に一致し、 r はピークの大きさに対応することが知られている。よってここでの定式化は、AR(2)が直列に接続されたシステムの各AR(2)の持つスペクトルのピーク周波数と強度について、滑らかさを仮定したことになっている。

なお、ここでは時間変化が滑らかであると想定して、ガウス分布を使っているが、突然の変化を含むような場合には、それに適したCauchy分布等の非ガウス分布を想定することもできる。それは、パラメータ推定には、後で述べるように、非ガウス型フィルタを用いるので、任意の分布を仮定しても構わないためである。

2.3 時変ピーク周波数モデルの改良

前述のモデルの定式化では、以下のような二つの多義性の問題が生じる。これはピーク数が少なかつた場合[4]には顕著ではなかったが、本研究ではこれは障害となるので、解決しなければならない。

一つめの多義性は、時変ピーク周波数モデルはAR(2)値を持つものとする。を直列に接続したシステムを表すが、この接続の順序に識別性がない点である。つまり、どのピークがどのAR(2)に対応するのかが一意でないことである。

もう一つの多義性は、一つの時変ピークが、周波数のほとんど変化しない二つのピークによって表される場合に生じる。これは、二つのピークの強度 r_1 と r_2 とを、表現される対象となる一つの時変ピークの周波数に近いほうを大きく、遠いほうを小さくとることによって起こる。これらの強度を、表現されるピークの周波数の変化に応じて変えてゆけば、実際には一つの時変ピークが、二つの周波数が一定なピークの強度だけが変化していく形で表されることとなる。

厳密にはピーク数が少ない場合でもこれらの性質を持つが、既存の報告[4]では、初期値の設定がうまく機能してこれらの多義性が回避できていたことと、ピーク数が少なければ多義性が健在することも少なかったことで、あまり問題にならなかった。しかし多数のピークを扱う場合には、識別性にとまらぬ曖昧さを解決しておく必要がある。

このうち最初の方の多義性を、次のように解決することを提案する。時間的滑らかさをピーク周波数

に直接仮定するのではなく、リパラメトリゼーションを行なって周波数の隣接するピークの「間隔」に滑らかさを課すことで、複数のピークに対する識別性を得るようにする。すなわち、 $w_k^\theta(t) \sim N(0, \tau_k^2)$ 、および $w_k^r(t) \sim N(0, \mu_k^2)$ として、

$$\begin{aligned}\Delta^d r_k(t) &= w_k^r(t) \\ \Delta^d \delta\theta_k(t) &= \delta w_k^\theta(t)\end{aligned}\quad (9)$$

ここで

$$\delta\theta_k(t) \equiv \begin{cases} \theta_k(t) & k=1, \\ \theta_k(t) - \theta_{k-1}(t) & k>1. \end{cases}$$

および

$$\delta w_k^\theta(t) \equiv \begin{cases} w_k^\theta(t) & k=1, \\ w_k^\theta(t) - w_{k-1}^\theta(t) & k>1. \end{cases}$$

である。

なお定常性の条件から、 $0 < r_k(t) < 1$ である。また $0 < \theta_k(t) < \pi$ であることから、 $0 < \delta\theta_1(t) < \pi$ となり、また $k > 1$ の $\delta\theta_k(t)$ については、 $\delta\theta_k(t) \geq 0$ であり、 $\sum_{k=1}^m \delta\theta_k(t) < \pi$ となる

値を持つものとする。

二つめの多義性は、後で述べるAICによる次数選択を行えばある程度回避できると考えられるが、それに加えて更に次のような方法をとることを提案する。ピークの強度に対応するパラメータ $r_k(t)$ について、ある定められた値 r_c よりも小さくならない、といった制約を設ける。すなわち、値域を $(0, 1)$ から $[r_c, 1)$ に制限する。ここで r_c の値としては、たとえば0.5等を用いることにする。この制約は、そもそもモデルの目的がピークをとらえることであるから、あまり小さな r_k はもはやピークとは呼べないため、妥当なものと考えられる。

これにより、例えば $d=1$ の場合には、式(9)の時間的滑らかさの仮定は、次のように表される。時変ピーク周波数モデル($d=1$)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_t &= [\delta\theta_1(t), \dots, \delta\theta_m(t), r_1(t), \dots, r_m(t)]^T \\ \mathbf{w}_t &= [\delta w_1^\theta(t), \dots, \delta w_m^\theta(t), w_1^r(t), \dots, w_m^r(t)]^T\end{aligned}$$

とし(T は転置),

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}_t \quad (10)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^p a_j(\mathbf{C}\mathbf{x}_t)y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (11)$$

$$(12)$$

ただし,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

で, \mathbf{E} は $m \times m$ の単位行列, 行列 \mathbf{D} はサイズ $m \times m$ の

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

である。また時変 AR 係数 $a_j(\mathbf{C}\mathbf{x}_t)$ は, 式 (5) および (7) に従って求められる。

2.4 時変係数 AR モデルとの比較

非定常スペクトル解析のためのモデルとして, 既にいくつかの研究があるが, ここではそれらとの関連を少し述べる。局所定常 AR モデル (LAR : locally stationary AR) は, Ozaki and Tong (1975) [15] および Kitagawa and Akaike (1978) [10] で提案され, データを適当な長さの区間に区切って, それぞれの区間に対して時間的に不変な係数を持つ AR モデルをあてはめるものである。Kitagawa and Akaike (1981) [11] および Tamura (1987) [16] では, これらの隣接する区間の AR 係数同士の間, 非定常ベイズモデル [2] における滑らかさを導入している。Kitagawa (1983) [5] および Kitagawa and Gersch (1985) [12] によって提案されている時変係数 AR モデルでは, 隣接する時刻の AR 係数の間に, 時間的滑らかさを導入している。

これらのモデルは全て式 (11) で定義した非定常 AR モデルのクラスに属する。LAR モデルは区分的に一定の AR 係数をもつ。またその他のモデルでは, 隣接する区間の AR 係数や隣接する時刻の AR 係数に対して時間的滑らかさを仮定している。

時変係数 AR モデルは

$$\Delta^d a_j^{(t)} \sim N(0, \tau^2). \quad (14)$$

という滑らかさを仮定している。これは $d = 1$ の場合, つぎのように書ける。

時変係数 AR モデル ($d = 1$)

$$\begin{bmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(t-1) \\ \vdots \\ a_p(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_p(t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

ただし $w_j(t) \sim N(0, \tau^2)$.

Kitagawa (1986) [6] によると, AR 係数に対して滑らかさを課すことは, 次の積分, パワースペクトルの時間変化の全周波数における積分値を小さくすることと同等である。

$$\int_0^\pi \left| \Delta^d A(\omega, t) \right|^2 d\omega = \sum_{j=1}^p \left| \Delta^d a_j^{(t)} \right|^2, \quad (16)$$

ここで

$$A(\omega, t) = 1 - \sum_{j=1}^p a_j^{(t)} e^{-ij\omega}. \quad (17)$$

一方時変ピーク周波数モデルでは, ピークの周波数および強度に対して直接的に滑らかさを課している点が, 時変係数 AR モデルとは異なっている。

このような滑らかさの違いから, 時変ピーク周波数モデルは次のような利点を持つ。そもそもスペクトル解析においては, パワースペクトルのピークが重要な情報を持ち, その挙動を知りたい場合が多い訳であるので, 我々の注意も AR 係数よりはピークに置かれるべきである。ピークに直接に滑らかさを設定できることは, この目的に合っている。また時変ピーク周波数モデルでは, 我々の知りたい情報であるピークの変化を, 直接的に推定できる。一方, 時変係数 AR モデルでは, AR 係数により間接的にしかスペクトルのピークが得られず, その変換は固有値問題を解くことになるので厄介である。

ただし, どんなモデルも例外ではないが, 時変ピーク周波数モデルにももちろん短所がある。それは, 非線形モデルであるために, 計算量が多くなる点である。例えば時変係数 AR モデルは, 線形で, かつ, すべての分布がガウス分布なので, 線形・ガウスのフィルタリング手法であるカルマンフィルタが利用できる。これに対し時変ピーク周波数モデルでは, 非線形モデルであることから, 非線形非ガウス型フィルタリング手法を用いなければならない。しかしながら, これらの計算量の差も, これまでの計算機環境の発展を考慮すれば, 将来的にはそれほど致命的な差ではなくなると考えられる。また, 本論文でも, 新たな非線形非ガウス型フィルタリングの手法であるモンテカルロフィルタによって, 計算量の問題が1段階解決されることを示している。次の節では, このフィルタリング手法について説明する。

3. モンテカルロフィルタによる状態推定

時変ピーク周波数モデルは非線形要素を含むため、パラメータの推定には非線形非ガウス型フィルタリング手法を用いる必要がある。ここでは非ガウス型フィルタリング手法として、非ガウス分布に従う粒子を使った、モンテカルロフィルタ [9] について簡単にまとめておく。

まず最初に、一般状態空間表現について説明する。これにより、さまざまな非線形・非ガウスモデルを表すことができる。そして時変ピーク周波数モデルや時変係数 AR モデルを、この一般状態空間表現で表す。また状態推定の方法について、若干説明する。

次にモンテカルロフィルタによって、一般状態空間表現されたモデルのパラメータを推定する方法と、尤度の計算、および次数決定の方法を説明する。また、パラメータ推定における初期状態の決定方法についても述べる。

3.1 一般状態空間表現

時変ピーク周波数モデルや時変係数 AR モデルを含むほとんどの非定常時系列モデルは、次で定義されるような一般化状態空間表現で表すことが可能である。

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{w}_t) \quad (18)$$

$$y_t = h(\mathbf{x}_t, \varepsilon_t) \quad (19)$$

ここで、式 (18) は「システム方程式」と呼ばれ、式 (19) は「観測方程式」と呼ばれる。システム方程式において、 \mathbf{x}_t は状態ベクトル (n -次元)、 \mathbf{w}_t は確率密度関数が $q(\mathbf{w})$ の分布に従うシステムノイズ (l -次元)、そして $\mathbf{g}(\cdot, \cdot)$ は $\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^l \mapsto \mathcal{R}^n$ となる関数である。

観測方程式においては、 y_t は観測系列 (スカラー)、 ε_t は確率密度関数が $\gamma(\varepsilon)$ の分布に従う観測ノイズ、そして $h(\cdot, \cdot)$ は $\mathcal{R}^n \times \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$ のような関数で、逆関数 $\varepsilon_t = h^{-1}(y_t, \mathbf{x}_t)$ が存在するものとする。

観測 $Y_N = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ が与えられた時の状態 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ の同時分布を推定する問題を状態推定と呼ぶが、通常この同時分布は、各時刻におけるそれまでのデータが与えられた時の条件付き分布に分解され、それらの積で表すことができる。

よって状態推定では、時刻の順に一つずつ、これらの条件付き分布を推定してゆけばよい。

時変ピーク周波数モデルや時変係数 AR モデルをこの一般状態空間表現で表すと、推定すべきパラメータが状態 \mathbf{x}_t であるので、状態推定を行う事によりパラメータが推定される。例えば時変ピーク周波数モデルにおいて $d = 1$ のとき、システム方程式は式 (10) であり、状態ベクトル \mathbf{x}_t は時変ピークの要素 $\delta\theta_k(t)$ と $r_k(t)$ から構成される。また観測方程式は式 (11) である。一方、時変係数 AR モデルで $d = 1$ の場合、観測方程式は時変ピーク周波数モデルと同じく式 (11) であり、システム方程式は式 (15) である。状態 \mathbf{x}_t は AR 係数から成るベクトルである。

3.2 状態推定の方法

状態推定の方法としては、状態空間表現されたモデルのクラスに応じた方法が、既存の研究の中に多くある。例えば線形でガウス分布の場合には、有名なカルマンフィルタが使える。それ以外の場合には、非ガウス型フィルタリングを必要とする。例えば 2 階微分を用いる拡張カルマンフィルタや、ガウス分布の重み付き和による非ガウス分布の近似 [3]、そして区分的線形関数や階段関数による非ガウス分布の近似 [7], [8] などがある。

時変係数 AR モデルは線形・ガウスなので、カルマンフィルタのアルゴリズムが適用可能である。これに対し、時変ピーク周波数モデルは非線形要素を含むため、状態の推定には非ガウス型フィルタリング手法が必要である。

[4] の報告においては、非ガウス型フィルタリングの手法として区分的線形・階段関数近似 [7], [8] を用いている。この近似では、状態の空間を細かい区間に分割して、それぞれの区間の確率を記憶し計算する方法を使っている。そのため、状態の次元が大きくなるにつれて、その記憶と計算の量は指数関数的に増大することになる。このような理由から、既存のフィルタリング手法では、扱える時変ピークの数に決定的な上限があった。

非ガウス型フィルタリングの最近の研究の中で、Kitagawa (1996) [9] によって提案され、モンテカルロフィルタと呼ばれている手法がある。この方法によって、ピーク数の上限の問題をある程度まで解決することが可能となる。

モンテカルロフィルタの基本的な考え方は、次のようなものである。まず、非ガウス分布をその分布に従う「粒子」によって表現する。これは非ガウス分布を、粒子の点で等確率を持つ経験分布関数によって近似したことに相当する。このような近似のもとで、1期先予測やろ波の分布の計算を各々の粒子の計算によって行うものである。すなわち各粒子ごとに個別に計算した結果得られた粒子によって、1期先予測やろ波の分布の経験分布関数が表されることになる。

このような計算方式から、モンテカルロフィルタでは、1期先予測やろ波の分布の計算が粒子の数のオーダーですむことになる。これは、これまでの階段関数の近似による非ガウスフィルタでは計算量が次元の指数オーダーだったのに比べて、かなり少ない量となっている。

3.3 モンテカルロフィルタ

モンテカルロフィルタ [9] の計算手順について、簡単に説明する。まず大きさ N の観測系列を次のように表す。

$$Y_N = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}.$$

次に一期先予測の分布、およびろ波の分布を推定するための粒子を、それぞれ次のように表す；

予測の粒子

$$\{\mathbf{p}_1^{(t)}, \mathbf{p}_2^{(t)}, \dots, \mathbf{p}_M^{(t)}\} \sim p(\mathbf{x}_t | Y_{t-1}),$$

ろ波の粒子

$$\{\mathbf{f}_1^{(t)}, \mathbf{f}_2^{(t)}, \dots, \mathbf{f}_M^{(t)}\} \sim p(\mathbf{x}_t | Y_t).$$

これらの粒子から、次の計算により、予測とろ波を交互に繰り返して、状態推定を行う。

予測

$$\mathbf{p}_i^{(t)} = \mathbf{g}(\mathbf{f}_i^{(t-1)}, \mathbf{w}_i^{(t)}) \quad (20)$$

ここで $\{\mathbf{w}_1^{(t)}, \mathbf{w}_2^{(t)}, \dots, \mathbf{w}_M^{(t)}\} \sim q(\mathbf{w})$.

ろ波

各粒子の尤度を次により計算する。

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(t)} &= p(y_t | \mathbf{p}_i^{(t)}) \\ &= \gamma \left(h^{-1}(y_t, \mathbf{p}_i^{(t)}) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

これら尤度に基づき、次のようにリサンプリングを行う。

$$\mathbf{f}_i^{(t)} = \begin{cases} \mathbf{p}_1^{(t)} & \text{の確率} = \alpha_1^{(t)} / \sum_{j=1}^M \alpha_j^{(t)} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{p}_M^{(t)} & \text{の確率} = \alpha_M^{(t)} / \sum_{j=1}^M \alpha_j^{(t)} \end{cases} \quad (22)$$

適当な初期状態 $p(\mathbf{x}_0 | Y_0)$ に従う粒子から計算を開始して、式 (20) および 式 (22) の計算を交互に時間 t の順に適用することにより、状態分布の近似推定 $p(\mathbf{x}_t | Y_t)$ および $p(\mathbf{x}_t | Y_{t-1})$ が全ての時刻 $t = 1, 2, \dots, N$ について求められる。

3.4 尤度計算と次数の決定

観測系列についてフィルタリングが終わったら、計算の途中経過を用いて尤度を計算することができる。モンテカルロフィルタの対数尤度は次のように得られる [9]。

対数尤度

$$\begin{aligned} l(\vartheta) &= \sum_{t=1}^N \log p(y_t | Y_{t-1}) \\ &= \sum_{t=1}^N \log \left(\sum_{j=1}^M \alpha_j^{(t)} \right) - N \log M, \end{aligned} \quad (23)$$

ϑ は「超パラメータ」と呼ばれ [2], システムノイズと観測ノイズの分布を規定するパラメータから成る。超パラメータの最適な値 $\hat{\vartheta}$ は、対数尤度を最大にすることで得られる。

このように得られた最大対数尤度から、次のように定義される赤池情報量規準 (AIC) を計算し、モデルの次数決定に利用する [1]。

AIC

$$\text{AIC} = -2l(\hat{\vartheta}) + 2(p + 1) \quad (24)$$

AIC の最も小さい次数を、最適な次数とみなすものとする。

3.5 初期状態

上述した中で、初期状態 $p(\mathbf{x}_0 | Y_0)$ を適切に与える必要がある。もし事前に初期状態に関する知識があれば、それに基づく初期分布を定めればよい。し

かもしも何も事前情報を持たない場合には、すべての可能性について平等な確率となるような無情報な分布を、初期状態として採用するのがよいと考えられる。

この無情報な分布として、全てのピークが同じ大きさ r_0 で、その周波数は等間隔になっているものを使用することを提案する。すなわち、 $k = 1, \dots, m$ について

$$\delta\theta_k(0) = 2\pi/(m+1), r_k(0) = r_0 \quad (25)$$

とする。ここで r_0 の値としては、ピークを推定するという目的から考えて、ある程度の大きな値を取るのが妥当と考えられる。 r_k の値域は先に制限を加えて $[0.5, 1.0]$ 等となっているので、例えば $r_0 = 0.8$ などが、ある程度の大きな値としては妥当かと考えられる。

このような無情報の初期分布からフィルタリングを始めた場合には、無情報分布の影響をできるだけなくすために、次のようにするのが妥当かと考えられる。まず時系列の先頭部分に対して1回目のフィルタリングを行う。得られた分布を初期状態として、再びデータの先頭から、今度はデータの末尾までフィルタリングを行う。そして、2回目の推定結果を最終的な結果として用いる。

このようにすることで、2回目の推定時の初期状態は、データの先頭部分から得られた情報を用いることができるようになる。1回目のフィルタリングにおいては、システム方程式のノイズの分散を十分に大きくしておくことで、データの先頭部分の持つピーク周波数をより早くとらえることが可能と考えられる。

4. 数値例

数値シミュレーション実験により、時変ピーク周波数モデルによる推定の様子を示す。また時変係数 AR モデルとの比較を、AIC およびピーク周波数の平均二乗誤差に関して行うことで、モデルの有用性を示す。

4.1 シミュレーションデータの生成

4種類のデータ系列を、シミュレーションにより生成した。これらを「データ1」、「データ2」、「データ3」および「データ4」と呼ぶことにする。

データの生成には非定常 AR モデルを用い、その係数を次のような特性根を持つように定めた。 $r_k(t)$ は時刻 k に拘らず一定とし、複数のピーク周波数 $\theta_k(t)$ のうちいくつかについて、一定の変化分が変わるものとした。この詳細を次に示す。

$$\text{データ 1 } r_1 = 1/1.2, \\ \theta_1(t) = 0.1 + 0.01t$$

$$\text{データ 2 } r_1 = r_2 = 1/1.2, \\ \theta_1(t) = 0.314 + 0.004t, \theta_2(t) = 1.571$$

$$\text{データ 3 } r_1 = r_2 = r_3 = 1/1.2, \\ \theta_1(t) = 0.314 + 0.004t, \theta_2(t) = 1.571, \\ \theta_3(t) = 2.356$$

$$\text{データ 4 } r_1 = 1/1.1, r_2 = r_3 = r_4 = 1/1.2, \\ \theta_1(t) = 0.314 + 0.004t, \theta_2(t) = 1.571, \\ \theta_3(t) = 2.094 + 0.002t, \theta_4(t) = 2.827$$

ここで、全てのデータについて $\sigma^2 = 1.0$ とし、これは推定においては既知であると仮定する。

各データのプロットを図1、図2、図3および図4に示す。

これらのデータでは、ピーク周波数および強度パラメータの真の値の変化が上記のような差分方程式により決定論的に表されているものの、パラメータを推定する際には、パラメータの変化を司る差分方程式は未知であるものとする。なおかつ、パラメータの変化がこのような増分一定の単純な差分方程式で表されるのかどうかについても未知であると仮定する。このようにパラメータ変化のダイナミクスが未知で、その事前情報が無い状況では、システム方程式(10)の \mathbf{w}_t には正規分布などの緩い仮定をおくようにし、パラメータの変化をデータから適応的に求める方法が妥当である。

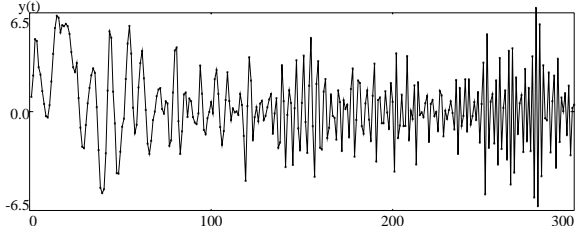


図 1 シミュレーションデータ 1
Fig. 1 Simulation data 1

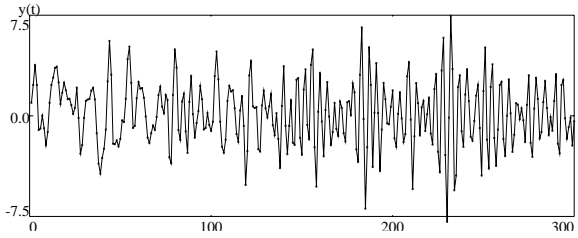


図 2 シミュレーションデータ 2
Fig. 2 Simulation data 2

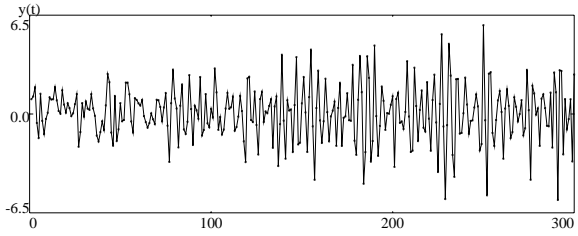


図 3 シミュレーションデータ 3
Fig. 3 Simulation data 3

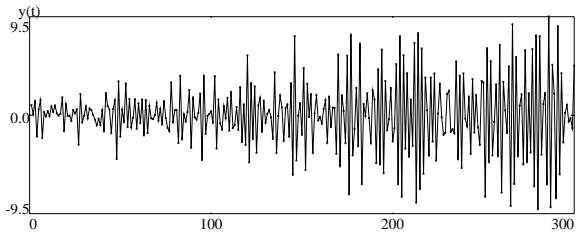


図 4 シミュレーションデータ 4
Fig. 4 Simulation data 4

4.2 パラメータの推定結果

モンテカルロフィルタによる時変ピーク周波数モデルのパラメータ推定を次のように行った。まず粒子数 M を 1000 とした。式 (25) の初期状態のパラメータ値は、 $r_0 = 0.8$ とした。初期状態の分布の推定は、データの先頭部分 $t \leq 20$ について、式 (8) のシステムノイズを $0.2(U - 0.5)$ および $0.05(U - 0.5)$ (U は $[0, 1]$ における一様乱数) として、1 回目のフィルタリングを行った。

また局所定常性のパラメータとして $NOBS$ を導入し、その値を 2 とした。これは、理論的には予測と観測を交互に行うとしていたが、実装上では観測 $NOBS$ 回につき 1 回の予測を行うようにするものである。このようにする理由は、データのサンプリング間隔に対して非定常性があまり大きくない場合には、 $NOBS$ を大きくすることでシステムノイズの分散が小さくなり過ぎないようにでき、また計算量も減らすことができるためである。

そして、状態ベクトルの取る値には、次のような制約がある。ピーク周波数 $\theta_k(t)$ は $(0, \pi)$ の範囲にあることと、強度パラメータ $r_k(t)$ は $[r_c, 1)$ の範囲にあることである ($r_c = 0.5$ とする)。この制約の実装方法はいくつか考えられるが、ここではそのうち最も簡単と思われる方法として、システム方程式での計算の結果がこれらの範囲外になった場合には、値を範囲の境界に戻すという方法を取ることにした。

このような条件で、未知のピーク数 m の候補として $m = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ についてそれぞれモデルのあてはめを行った。各 m においてそれぞれ、尤度を最大にするように超パラメータ τ_k^2 および μ_k^2 を求めた。このとき超パラメータの値の候補をあらかじめ

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \{0.2, 0.1, 0.9 \times 10^{-1}, 0.8 \times 10^{-1}, \\ &\quad 0.7 \times 10^{-1}, 0.6 \times 10^{-1}, 0.5 \times 10^{-1}, \\ &\quad 0.4 \times 10^{-1}, 0.3 \times 10^{-1}, 0.2 \times 10^{-1}, \\ &\quad 0.1 \times 10^{-1}\}, \\ \mu^2 &= \{0.1, 0.1 \times 10^{-1}, 0.5 \times 10^{-2}, \\ &\quad 0.1 \times 10^{-2}, 0.5 \times 10^{-3}, 0.1 \times 10^{-3}\} \end{aligned}$$

のように決めておき、この中から尤度を最大にするものを超パラメータの推定値とした。なお尤度の計算には、初期状態の影響を少なくするために、データの先頭部分 ($t \leq 40$) は除外した。

表 1 時変ピーク周波数モデルの超パラメータの推定結果 (データ 1, データ 2)

Table 1 Estimated hyper parameters of the TVPP model for data1 and data2

data1		
m	τ^2	μ^2
1	0.9×10^{-1}	0.5×10^{-3}
2	0.1×10^0	0.1×10^{-1}
3	0.6×10^{-1}	0.1×10^{-1}
4	0.4×10^{-1}	0.1×10^{-1}
5	0.3×10^{-1}	0.1×10^{-1}

data2		
m	τ^2	μ^2
1	0.7×10^{-1}	0.1×10^{-1}
2	0.3×10^{-1}	0.5×10^{-2}
3	0.4×10^{-1}	0.5×10^{-3}
4	0.2×10^{-1}	0.1×10^{-1}
5	0.3×10^{-1}	0.1×10^{-2}

得られた超パラメータの値を表 ?? に示す。またこれらの AIC の値も計算し、表 3 に示した。表では、各データについて、AIC 最小の箇所に下線を引いてある。表を見ると、正しい次数が全てのデータについて選択されているのが分かる。

各データにおいて、これらの最適次数の場合について推定されたピーク周波数の分布のメジアンのプロットを、図 5, 6, 7 および 8 にそれぞれ示した。これらの図では、真のピーク周波数を実線 (直線) で表している。

4.3 時変係数 AR モデルとの比較

モデルの有効性を示すために、時変係数 AR モデルとの比較を行った。候補となる AR 次数 $p = 1, \dots, 10$ についてそれぞれモデルのあてはめを行い、各 AR 次数において、超パラメータ

$$\tau^2 = \{10^{-q} | q = 1, \dots, 9\}$$

のそれぞれについて尤度を求め、この中から尤度を最大にする値を、超パラメータの推定値とした。またデータの先頭部分は、時変ピーク周波数モデルと同様、 $t \leq 20$ について予めフィルタリングを行い、

表 2 時変ピーク周波数モデルの超パラメータの推定結果 (データ 3, データ 4)

Table 2 Estimated hyper parameters of the TVPP model for data3 and data4

data3		
m	τ^2	μ^2
1	0.7×10^{-1}	0.1×10^0
2	0.4×10^{-1}	0.1×10^{-1}
3	0.3×10^{-1}	0.1×10^{-2}
4	0.3×10^{-1}	0.1×10^{-3}
5	0.2×10^{-1}	0.5×10^{-2}

data4		
m	τ^2	μ^2
1	0.2×10^0	0.1×10^0
2	0.5×10^{-1}	0.1×10^0
3	0.4×10^{-1}	0.5×10^{-2}
4	0.4×10^{-1}	0.5×10^{-2}
5	0.3×10^{-1}	0.1×10^{-1}

$t \leq 40$ は尤度の計算からは除外した。超パラメータの推定結果を表 4 に、また得られた AIC の値を表 5 に示す。各データについての AIC 最小の箇所に下線を引いた。表をみると、時変係数 AR モデルの場合には、データ 4 を除いて、真の AR 次数が選ばれていることが分かる。データ 4 については、真の AR 次数の箇所に † を記入してある。

次に、ピーク周波数の推定結果の比較を行った。このとき、ピーク数が異なると比較にならないので、真のピーク数が分かっているものとして比較を行っ

表 3 時変ピーク周波数モデルの AIC

Table 3 AIC of the TVPP model

m	data set			
	data1	data2	data3	data4
1	<u>819.03</u>	913.55	892.24	1123.74
2	848.07	<u>815.96</u>	854.22	945.94
3	857.88	839.24	<u>829.56</u>	884.16
4	861.32	835.96	840.59	<u>840.89</u>
5	867.22	840.09	843.84	854.86

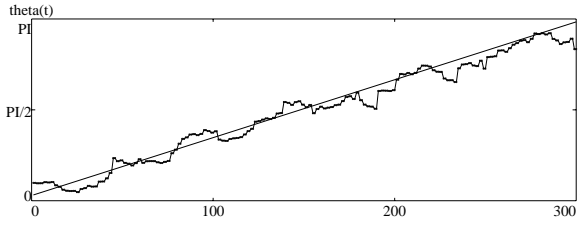


図 5 時変ピーク周波数モデルで推定されたピーク周波数のメジアン(データ 1)

Fig. 5 Median of the peak frequencies of power spectrum estimated by the TVPP model for data 1

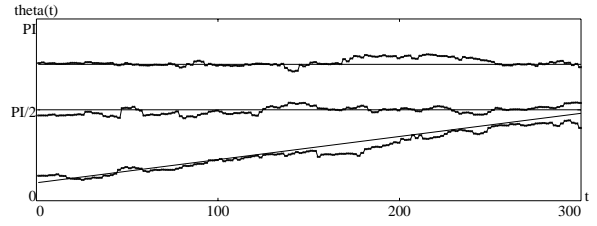


図 7 時変ピーク周波数モデルで推定されたピーク周波数のメジアン(データ 3)

Fig. 7 Median of the peak frequencies of power spectrum estimated by the TVPP model for data 3

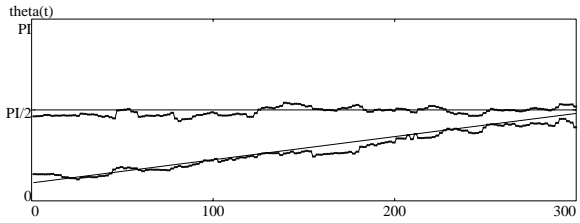


図 6 時変ピーク周波数モデルで推定されたピーク周波数のメジアン(データ 2)

Fig. 6 Median of the peak frequencies of power spectrum estimated by the TVPP model for data 2

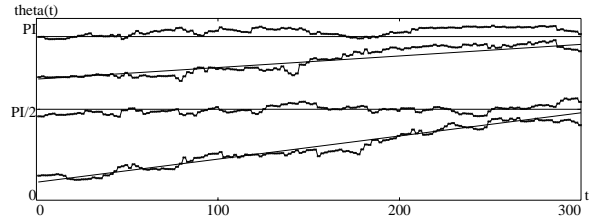


図 8 時変ピーク周波数モデルで推定されたピーク周波数のメジアン(データ 4)

Fig. 8 Median of the peak frequencies of power spectrum estimated by the TVPP model for data 4

た。具体的には、データ 4 については時変係数 AR モデルの次数選択の結果が真のものと異なったが、これについては表 5 中の † で示した箇所に該当する推定結果を比較に用いた。また、場合によっては複素根ではなく実根が求まってしまうことがあるので、モデルの次数が 1 多い場合についても推定結果の比較を行った。

時変係数 AR モデルによって得られた時変 AR 係数の推定値(平均)から、2 段 QR 法によって複素共役な固有値を求めた。この指数部が、時変ピーク周波数モデルにおけるピーク周波数に対応している。実固有値が求まった場合には、以下の図および比較にはそれを用いないようにした。

このように求められたピーク周波数の推定値を、各データについて、図 9, 10, 11 および 12 に示した。また、次数の 1 多い場合についても、推定されたピーク周波数を図 13, 14, 15 および 16 に示し

た。ここでも実線(直線)は真のピーク周波数を表している。推定されたピーク周波数は、時変係数 AR モデルの場合には隣接する時刻ごとの連続性が明らかではないため、各時刻ごとに個別の線分で表した。

表 3 と表 5 に示された両モデルの AIC の値を比較すると、全てのデータについて、時変ピーク周波数モデルの方が時変係数 AR モデルよりも良いことが分かる。特にデータ 4 については、その違いは顕著である。

また AIC 以外の規準として、ピーク周波数の平均二乗誤差を

$$I = \frac{1}{(N-40)} \sum_{t=41}^N \frac{1}{m(t)} \sum_{k=1}^{m(t)} [\hat{\theta}_k(t) - \theta_k^*(t)]^2 \quad (26)$$

によって計算し、比較してみた。ここで、 $\hat{\theta}_k(t)$ はピーク周波数の推定値を示し、 $\theta_k^*(t)$ は真のピーク

表 4 時変係数 AR モデルの超パラメータの推定結果

Table 4 Estimated hyper parameters of the TVCAR model

p	data set			
	data1	data2	data3	data4
1	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-6}
2	10^{-2}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-4}
3	10^{-2}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
4	10^{-2}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
5	10^{-2}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
6	10^{-2}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
7	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
8	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
9	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
10	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}

周波数を示す。なお、上式中の $m(t)$ は、各時刻におけるピークの数で、時変ピーク周波数モデルの場合には $m(t) = m$ と一定であるが、時変係数 AR モデルの場合には、各時刻において 2 段 QR 法により求められた共役複素根の組の数である。

この値を各データについて計算したものを、表 6 に示す。表中の † は、先に述べたように、AIC による次数選択と真の AR 次数とが異なることを示している。表を見ると、全てのデータについて、時変ピーク周波数モデルの方が時変係数 AR モデルより優れていることが分かる。

また時変係数 AR モデルでは、AR 係数に複素共役な特性根を持つといった制約がないために、2 段 QR 法によって計算される固有値が時刻ごとに複素共役であったり実根であったりと変化している。そしてその変化をモデルが明示的に表していないので、求められたピーク周波数がどのように連続的に変化しているのか判断するには、また別の方法が必要となる。一方時変ピーク周波数モデルでは、はじめからピーク周波数の変化をモデル定式化に入れてあるため、このような問題は生じない。

表 5 時変係数 AR モデルの AIC

Table 5 AIC of the TVCAR model

p	data set			
	data1	data2	data3	data4
1	1015.39	1192.35	1079.72	1125.53
2	<u>835.56</u>	900.34	887.30	1043.89
3	849.64	878.46	880.36	1032.91
4	863.66	<u>831.70</u>	856.90	943.61
5	870.18	837.06	864.71	<u>943.51</u>
6	881.30	846.96	<u>853.43</u>	948.32
7	893.92	854.85	858.26	949.67
8	899.69	861.88	863.68	†948.34
9	907.93	870.13	872.42	950.73
10	912.94	876.18	878.34	954.54

4.4 計算量および推定精度の比較

時変ピーク周波数モデルにモンテカルロフィルタを導入することで、これまでの研究 [4] よりも計算量が減り、より多い数の時変ピークの推定が可能となった。ここでは計算量がどの程度減少したか検討する。また、時変係数 AR モデルとの計算量の比較も行う。計算量のみでなく、推定精度についても検討する。

まず各方法について、一期先予測とろ波に必要な計算量を求める。最初に [4] で使われている非ガウス分布を数値近似したフィルタリング方法 [7], [8] について検討する。 p 次元の状態ベクトル

$$\mathbf{x}_t = [x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{p,t}]$$

の各要素を K 個の区間 δx に分割して数値近似した場合、一期先予測

$$p(\mathbf{x}_t | Y_{t-1}) = \int p(\mathbf{x}_{t-1} | Y_{t-1}) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) d\mathbf{x}_{t-1} \quad (27)$$

ただし

$$\int \dots \int f(\mathbf{x}_t) d\mathbf{x}_t = \int \dots \int f(\mathbf{x}_t) dx_{1,t} dx_{2,t} \dots dx_{p,t} \quad (28)$$

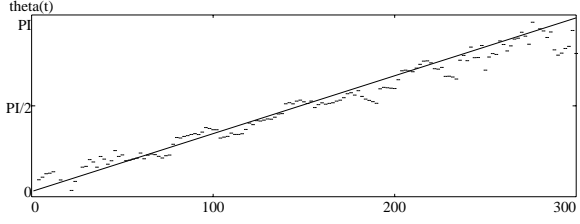


図 9 時変係数 AR モデルで推定されたピーク周波数 (データ 1, 真の次数)

Fig. 9 The peak frequencies of power spectrum estimated by the TVCAR model for data 1 (true order)

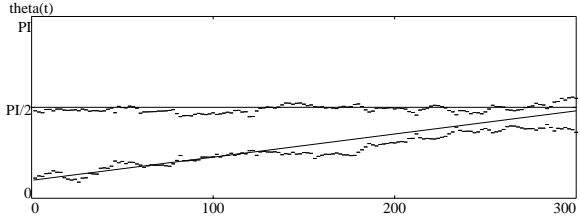


図 10 時変係数 AR モデルで推定されたピーク周波数 (データ 2, 真の次数)

Fig. 10 The peak frequencies of power spectrum estimated by the TVCAR model for data 2 (true order)

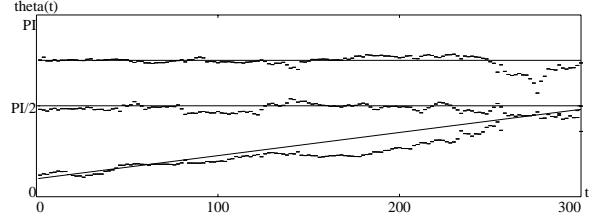


図 11 時変係数 AR モデルで推定されたピーク周波数 (データ 3, 真の次数)

Fig. 11 The peak frequencies of power spectrum estimated by the TVCAR model for data 3 (true order)

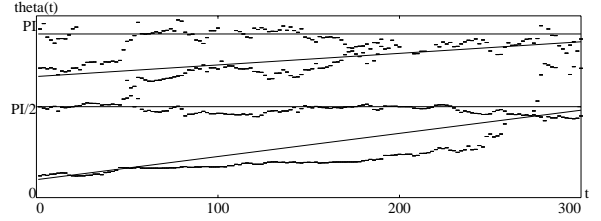


図 12 時変係数 AR モデルで推定されたピーク周波数 (データ 4, 真の次数)

Fig. 12 The peak frequencies of power spectrum estimated by the TVCAR model for data 4 (true order)

は、各区間の確率が次のように計算される。

$$p_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{(t)} = \delta x^p \times \sum_{k_1=1}^K \sum_{k_2=1}^K \times \dots \times \sum_{k_p=1}^K f_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{(t-1)} q_{j_1, j_2, \dots, j_p, k_1, k_2, \dots, k_p} \quad (29)$$

この計算で 1 回で、 K^p 回の積和が必要である。そしてこの計算が K^p 回行われるので、 $(K^p + 1)K^p$ 回の積演算と K^{2p} 回の和演算が要る。

この後、確率の正規化が次のように行われる。

$$p_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{(t)} = \frac{p_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{(t)}}{\delta x^p \sum_{k_1=1}^K \sum_{k_2=1}^K \dots \sum_{k_p=1}^K p_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{(t)}} \quad (30)$$

ここで K^p 回の和演算と、 $[K^p + 1]$ 回の積演算が

要る。

またろ波は、

$$p(\mathbf{x}_t | Y_t) = \frac{p(\mathbf{x}_t | Y_{t-1})p(y_t | \mathbf{x}_t)}{p(y_t | Y_{t-1})} \quad (31)$$

$$p(y_t | Y_{t-1}) = \int p(\mathbf{x}_t | Y_{t-1})p(y_t | \mathbf{x}_t) d\mathbf{x}_t$$

を数的に次のように計算し、各区間の確率を求める。

$$f_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{\prime(t)} = p_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{(t)} \gamma(y_t - h_t(j_1, j_2, \dots, j_p))$$

$$f_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{(t)} = \frac{f_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{\prime(t)}}{\delta x^p \sum_{k_1=1}^K \sum_{k_2=1}^K \dots \sum_{k_p=1}^K f_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{\prime(t)}} \quad (32)$$

ここで 2 つめの式は確率の正規化と同じなので、前述した K^p 回の和演算と、 $[K^p + 1]$ 回の積演算が

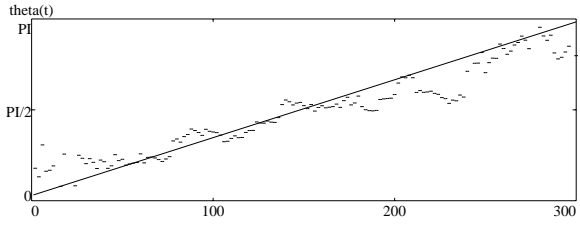


図 13 時変係数 AR モデルで推定されたピーク周波数 (データ 1, 真の次数+1)

Fig. 13 The peak frequencies of power spectrum estimated by the TVCAR model for data 1 (true order+1)

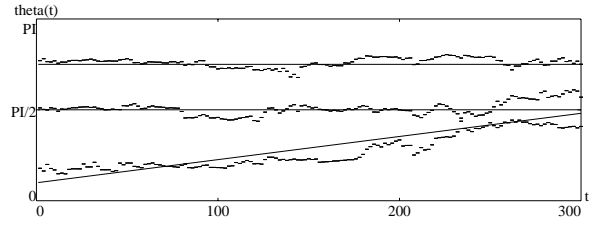


図 15 時変係数 AR モデルで推定されたピーク周波数 (データ 3, 真の次数+1)

Fig. 15 The peak frequencies of power spectrum estimated by the TVCAR model for data 3 (true order+1)

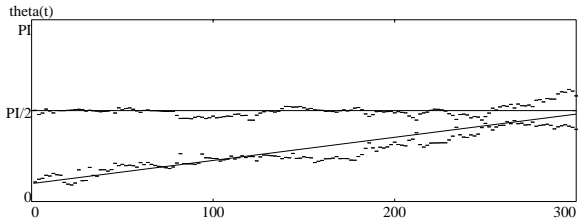


図 14 時変係数 AR モデルで推定されたピーク周波数 (データ 2, 真の次数+1)

Fig. 14 The peak frequencies of power spectrum estimated by the TVCAR model for data 2 (true order+1)

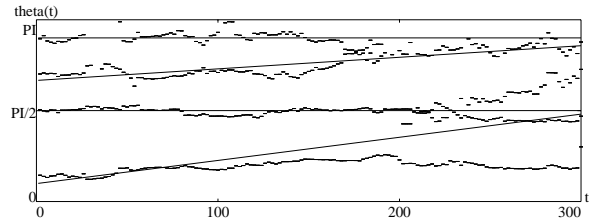


図 16 時変係数 AR モデルで推定されたピーク周波数 (データ 4, 真の次数+1)

Fig. 16 The peak frequencies of power spectrum estimated by the TVCAR model for data 4 (true order+1)

要る。また 1 つめの式では、 $\gamma(\cdot)$ の尤度計算が K^p 回、積演算が K^p 回必要となる。

以上をまとめると、積演算が $[K^{2p} + 4K^p + 2]$ 回、和演算が $[K^{2p} + K^p]$ 回、尤度計算が K^p 回となる。

一方モンテカルロフィルタでは、乱数発生 of 計算量は度外視して考えることにすると、一期先予測は、式 (20) より、和演算が (粒子数 M) \times (次元 p) 回分行われる。次にろ波では、式 (21) の尤度計算が M 回要る。またリサンプリングが式 (22) により行われるが、この実装方法はさまざまであって、積や和の演算に換算するのもむずかしいので、リサンプリングが粒子数 M のオーダーで行われる計算量であると見積もることとする。

これらを比べると、 p が 1 より大きい場合には、分割した区間の数を $K = 100$ 程度としても、例え

ば粒子数 $M = 10000$ 程度のモンテカルロフィルタの方が、計算量的に少ないことが分かる。

次に、時変係数 AR モデルとの計算量の比較を行う。1 回の一期先予測およびろ波にかかる計算量は、単純に計算した場合には n^3 のオーダーであるが、共分散行列の対称性を考慮すると n^2 のオーダーとなる。また高速カルマンフィルタを用いることで、 n のオーダーで計算することもできる [13]。この計算量は、時変ピーク周波数モデルで用いる非ガウスフィルタリング手法やモンテカルロフィルタに比べてはるかに小さいことがわかる。しかし時変係数 AR モデルで推定されるのは時間変化する AR 係数の値なので、これからピーク周波数と強度を求めるためには QR 法などで固有値を求める必要があり、その計算コストも更にかかることになる。

次に推定精度に関して検討する。最初に非ガウス

分布を数値近似したフィルタリング方法 [7], [8] と、モンテカルロフィルタとの比較を行う。前者は分割数 K を大きくとる程、推定精度は良くなるが、上に述べたように計算量が非常に大きくなってしまふので、現実的には K を十分大きくとることはできない。よって、ピーク周波数については $[0, \pi]$ 区間を K 等分した程度の精度でしか推定することができない。これは例えば $K = 100$ 程度だとすると、0.3 程度の誤差が含まれることになる。一方モンテカルロフィルタでは、このような区間分割に伴う誤差はないが、粒子の数を十分大きくとらないと推定誤差を生じる。

そして時変係数 AR モデルとの推定精度の比較について検討する。時変係数 AR モデルによる推定は、区間分割した近似や粒子による分布関数の近似が含まれないため、これらに比べ非常に高い精度で時変 AR 係数を推定できると考えられる。しかし、時変ピーク周波数モデルが複素共役な特性根に基づく定式化をしているのに対して、時変係数 AR モデルではそのような制約がないまま推定を行うため、QR 法等で固有値を求める際に不必要な実数根が求まってしまうことがある。そのため、ピーク周波数を正しく得られない場合が生じると考えられる。シミュレーションの結果得られた表 6 でもわかるように、ピーク周波数の平均二乗誤差ではおもしろくない結果となってしまう場合がある。

5. おわりに

モンテカルロフィルタを時変ピーク周波数モデルの状態推定に用い、また状態のリパラメトリゼーション等の改良を行うことで、これまでの研究 [4] より多い数の時変ピークを持つパワースペクトルの推定ができることを、シミュレーション実験により示した。

本研究で新たに提案したのは、次の事柄である。まずモンテカルロフィルタを用いることで、状態の次元、すなわちピークの数、これまでより大きくとることが可能となった。つぎに状態のリパラメトリゼーションを行った。これまで状態はピーク周波数だったものを、隣接するピークの周波数の差を状態として持つものとし、ピークの多義性を解消した。また、ピークを推定するという目的を考慮し、ピーク強度のパラメータ $r_k(t)$ が、大きな値を取るよう制約を加えた。そして、初期状態として等間隔

表 6 推定されたピーク周波数の平均二乗誤差 ($[\text{rad}^2]$)
Table 6 Mean squares error of estimated peak frequency ($[\text{rad}^2]$)

data set	TVPP	TVCAR
		(上 : 真の次数) (下 : 真の次数 + 1)
data1	0.2196×10^{-1}	0.2913×10^{-1} 0.6425×10^{-1}
data2	0.6031×10^{-2}	0.1359×10^{-1} 0.1452×10^{-1}
data3	0.6162×10^{-2}	0.1656×10^{-1} 0.1548×10^{-1}
data4	0.8006×10^{-2}	$\dagger 0.3364 \times 10^{-1}$ $\dagger 0.6880 \times 10^{-1}$

の周波数を持つピークを用い、データの先頭部分についてあらかじめフィルタリングして再び先頭から状態推定を行う工夫も提案した。

このような、新たなフィルタリング法の導入とモデルの改良によって、これまでの研究 [4] では 2 までであったピークの数を増やすことが可能となり、4 までの場合についてシミュレーション実験にて推定結果を報告した。実験では、既存モデルの例として時変係数 AR モデルを対象に、AIC およびピーク周波数の平均二乗誤差について比較を行った。その結果、ここで扱った全てのデータについて、時変ピーク周波数モデルの方が優れていることを示した。また計算量と推定精度についても検討を行った。

今後の課題としては、階差 d が 2 の場合についても実験を行うことや、AIC や平均二乗誤差以外の規準についても比較を試みることが挙げられる。またシミュレーションではなく実際のデータについて解析を行うことが挙げられる。現在検討中の実データとしては、文献 [14] において局所定常 AR モデルにより解析されている、翼の非定常不規則振動がある。このデータについては、現段階では次のような問題があるので、本論文で提案した時変ピーク周波数モデルをそのまま適用しただけでは十分な解析結果が得られないことが分かっている。問題点と

しては、一つのピークを単純に AR(2) で表しただけでは十分な尤度が得られない点や、複数のピーク周波数が連動して変化しているような状況が見受けられる点が挙げられる。これらの性質を今後モデルに採り入れ、実データの解析を試みたいと考えている。

謝辞

詳細な点にわたるご指摘、コメントを頂いた査読の先生方に感謝します。また本研究は、文部省科学研究費補助金、奨励研究(A)の補助を受けています。

参考文献

- [1] H. Akaike: A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 19, No. 6, pp. 716-723, 1974.
- [2] H. Akaike: Likelihood and the Bayes procedure, *Bayesian Statistics*, University Press, pp.143-166, 1980.
- [3] D. L. Alspach and H. W. Sorenson Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximations, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 17, No. 4, pp. 439-448, 1972.
- [4] N. Ikoma: Estimation of time varying peak of power spectrum based on non-Gaussian nonlinear state space modeling, *Signal Processing*, Vol. 49, pp. 85-95, 1996.
- [5] G. Kitagawa: Changing spectrum estimation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 89, No. 3, pp. 433-445, 1983.
- [6] 北川源四郎: 時変係数自己回帰モデル - プログラム TV-CAR の紹介 -, *統計数理*, 第 34 巻, 第 2 号, pp. 273-283, 1986.
- [7] G. Kitagawa: Non-Gaussian state-space modeling of nonstationary time series (with discussion), *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 82, No. 400, pp. 1032-1063, 1987.
- [8] G. Kitagawa: A nonlinear smoothing method for time series analysis, *Statistica Sinica*, Vol. 1, No. 2, pp. 371-388, 1991.
- [9] G. Kitagawa: Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models, *Journal of Computational Graphical Statistics*, Vol. 5, No. 1, pp. 1-25, 1996.
- [10] G. Kitagawa, and H. Akaike: A procedure for the modeling of non-stationary time series, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. 30, Part B, pp. 351-363, 1978.
- [11] G. Kitagawa and H. Akaike: On TIMSAC-78, *Applied Time Series Analysis II*, Academic Press, New York, 1981.

- [12] G. Kitagawa and W. Gersch: A smoothness priors time-varying AR coefficient modeling of nonstationary covariance time series, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 30, No. 1, pp. 48-56, 1985.
- [13] L.Ljung, M.Morf and D.Falconer: Fast calculation of gain matrices for recursive estimation schemes, *International Journal of Control*, Vol.27, No.1, pp. 1-19, 1978.
- [14] 峯岸正勝, 安藤泰勝 他: 超音速デルタ翼振動特性と安定限界の推定, 第 2 報, 非定常な不規則応答の局所定常時系列解析, 航空宇宙技術研究所報告, TR-1179, 1992.
- [15] T. Ozaki and H. Tong: On the fitting of non-stationary autoregressive models in time series analysis, *Proceeding of the 8th Hawaii International Conference on System Sciences*, pp. 224-226, 1975.
- [16] Y. H. Tamura: An approach to the non-stationary process analysis, *Annals of The Institute of Statistical Mathematics*, Vol. 39, No. 1, Part B, pp. 227-241, 1987.

生駒 哲一 1989年 法政大・工・電気(計測制御)卒。1991年 同学大学院修士課程修了。1995年 総合研究大学院大学博士課程修了。博士(学術)。同年、広島市立大学情報科学部助手。1998年より、九州工業大学工学部講師(現職)。非定常スペクトル推定の研

究に従事。日本統計学会, 応用統計学会, 日本神経回路学会, 日本ファジィ学会, IEEE 各会員。

(1998年6月18日受付, 1998年11月16日再受付)