(ポスターセッション用)

モンテカルロフィルタを使った

要旨：

非線形非ガウス型の非定常時系列モデルの状態推定の方法として，非ガウス分布をその実現値の粒子で近似するモンテカルロフィルタがある．モンテカルロフィルタを用いれば，これまで線形ガウスの制約の中で考案されてきたモデルに限らず，より自由なモデル設計が可能である．本研究では，非定常スペクトル解析のモデルとして非線形非ガウスのものを使い，線形ガウスのモデルとの比較を行う．

非定常スペクトル解析

本研究は，文部省科学研究費補助金，

奨励研究（Ａ）の補助を受けています．

生駒　哲一

九州工業大学 工学部 電気工学科 情報工学教室

〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町１−１

TEL : 093-884-3216,　FAX : 093-871-5835

E-mail : ikoma@comp.kyutech.ac.jp

研究の背景

モンテカルロフィルタ (北川 1996) の特徴

- 非ガウス分布に従う粒子によるフィルタリング計算
  計算のオーダー：粒子の数
  状態ベクトルの次元：２０程度も十分可能

- 区分的線形関数による非ガウス分布の近似 (北川 1987)
  計算のオーダー：(区分の数) の (状態ベクトルの次元) 乗
  状態ベクトルの次元：せいぜい４程度

- 非線形非ガウス型状態空間モデルの開発
  状態の次元を十分に高くとることができるようになった．
  線形・ガウス分布にとらわれない，自由なモデル開発が可能に．

モンテカルロフィルタ (北川 1996) は，非ガウス分布をその分布に従う粒子によって近似し，粒子に対する計算を行うことで予測–ろ波の分布が得られる．非ガウス分布を区分的線形関数等で近似する方法 (北川 1987) と比べ，計算量が指数関数のオーダーから粒子数のオーダーへと大きく減少した．そのため状態ベクトルの次元を，これまでより多くとることができるようになった．

このような特徴を持つモンテカルロフィルタを使うことで，時系列解析モデルの開発は線形・ガウス分布のモデルに限定されずに，非線形・非ガウス分布のモデルを自由に用いることができるようになった．

研究の目的

時変ピーク周波数モデル (生駒 1996)

- パワースペクトルのピークを直接に推定可能
  モデル定式化：非線形 (= 非ガウス)

- モンテカルロフィルタの使用
  シミュレーション実験：これまでより多いピーク数
  実データの解析：多数のピークが必要になる

時系列解析で推定されるパワースペクトルは，データの周期的性質を，周波数ごとの強さの分布で表している．パワースペクトルのピークは，その周波数の振動成分が多く含まれていることを表している．

ピーク周波数の時間的変化を推定するために，時変ピーク周波数モデル (生駒 1996) が開発された．このモデルは特性根の時間変化をシステムモデルに持ち，非線形な観測モデルを持つ．非線形性のため状態の分布は非ガウスになるので，フィルタリングには非線形・非ガウスの方法を用いる必要がある．

モンテカルロフィルタの使用により，非線形項を持つ時変ピーク周波数も実用上十分なピーク数を扱うことができるようになった．本研究の目的は，シミュレーション実験によりこれを検証し，実データに対する解析を行うことである．

時変ピーク周波数モデル

観測モデル：

$$y_t = \sum_{j=1}^{2m} a_j(\Theta_t)\, y_{t-j} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$$…観測ノイズ

システムモデル：

$$\Theta_t = \Theta_{t-1} + \mathbf{w}_t, \qquad \mathbf{w}_t \sim N(0, \mathrm{diag}(\tau^2))$$…システムノイズ

※$\Theta_t = [\theta_1(t), \cdots, \theta_m(t)]$ ：ピーク周波数

特性根 $z = r_k\, e^{\pm i\theta_k} \quad (k = 1, \cdots, m)$ … 複素共役 m 組

$$1 - \sum_{j=1}^{2m} a_j z^j = 0$$ …特性方程式

観測モデルは偶数次 $(2m)$ の自己回帰モデルで，データ y_t の自己回帰係数 a_j が，時間変化するピーク周波数 Θ_t によって規定される．システムモデルは，ピーク周波数 Θ_t の滑らかな時間変化を記述している．滑らかさはシステムノイズの分散 τ^2 によって決まる．

ピーク周波数 Θ_t は特性方程式の根 $r_k\, e^{\pm i\theta_k}$ の指数部に対応しており，2 次の AR モデル $(\mathrm{AR}(2))$ ではこれがパワースペクトルのピーク周波数に一致する．時変ピーク周波数モデルは，$\mathrm{AR}(2)$ を直列に複数接続したときの，各 $\mathrm{AR}(2)$ のパワースペクトルのピークを推定するモデルである．

フィルタリング手法による状態推定で，1 時刻前までのデータ Y_{t-1} が与えられた下での状態 Θ_t の分布 $p(\Theta_t|Y_{t-1})$ (これを 1 期先予測と呼ぶ) や，現時刻までのデータが与えられた下での状態の分布 $p(\Theta_t|Y_t)$ (これをろ波と呼ぶ) が得られる．時変ピーク周波数モデルは，観測モデルがピーク周波数 (= 状態) Θ_t によって非線形に規定されている (自己回帰係数 $a_j(\Theta_t)$ が非線形) ため，非線形・非ガウス型のフィルタリングを行う必要がある．

モンテカルロフィルタ 北川 (1996)

粒子による非ガウス分布の近似：

$$\{\mathbf{p}_1(t), \cdots, \mathbf{p}_M(t)\} \sim p(\Theta_t|Y_{t-1}), \quad \{\mathbf{f}_1(t), \cdots, \mathbf{f}_M(t)\} \sim p(\Theta_t|Y_t)$$

１期先予測： $p(\Theta_t|Y_{t-1})$

$$\mathbf{p}_j(t) = \mathbf{f}_j(t-1) + \mathbf{w}_t \quad \text{...システムノイズの印加}$$

ろ波： $p(\Theta_t|Y_t)$

$$\alpha_j(t) = \log p(y_t|\mathbf{p}_j(t)) \quad \text{...各粒子の尤度}$$

$$\mathbf{f}_j(t) = \begin{cases} \mathbf{p}_1(t) & \text{となる確率} \quad \alpha_1(t) \\ \vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \mathbf{p}_M(t) & \text{となる確率} \quad \alpha_M(t) \end{cases} \qquad \text{...尤度に基づくリサンプリング}$$

フィルタリングに用いる「１期先予測」および「ろ波」の非ガウス分布 $p(\Theta_t|Y_{t-1})$ および $p(\Theta_t|Y_t)$ を，それらの分布に従う粒子 $\{\mathbf{p}_1(t), \cdots, \mathbf{p}_M(t)\}$ および $\{\mathbf{f}_1(t), \cdots, \mathbf{f}_M(t)\}$ により近似する．具体的には，粒子の各点で等確率を持つような経験分布関数により近似がなされる．

１期先予測の分布に従う粒子は，１時刻前のろ波の粒子から計算される．具体的には，ろ波の各々の粒子に，システムノイズ $\mathbf{w}_t$ に従う乱数を加える．

またろ波の分布に従う粒子は，先に求めた１期先予測の粒子から計算される．具体的には，１期先予測の各粒子の予測の良さ (尤度 $\alpha_j(t)$) をまず求めて，予測の良い粒子が多く残り悪い粒子が減るようにする．より正確には，尤度に基づくリサンプリングを行うことになる．

以上の手続きが，遺伝的アルゴリズムにおける突然変異と淘汰に対応していることを指摘した研究もある (樋口 1996)．

時変係数ＡＲモデル 北川 (1985)

観測モデル：

$$y_t = \sum_{j=1}^{p} a_j(t)\, y_{t-j} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$$...観測ノイズ

システムモデル：

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{a}_{t-1} + \mathbf{w}_t, \qquad \mathbf{w}_t \sim N(0, \mathrm{diag}(\tau^2))$$...システムノイズ

※$\mathbf{a}_t = [a_1(t), \cdots, a_p(t)]$ ：時変ＡＲ係数

ＡＲ係数の滑らかな変化： $A(w,t)$ の小さな変化

$$p(\omega,t) = \frac{\sigma^2}{\left|1 - \sum_{j=1}^{p} a_j(t) e^{-ij\omega}\right|^2} \equiv \frac{\sigma^2}{|A(w,t)|^2}$$ ...パワースペクトル

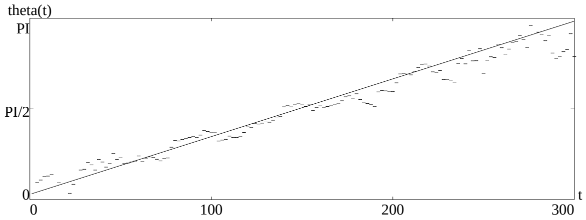
$$\int_0^{\pi} |\Delta A(w,t)|^2 d\omega = \sum_{j=1}^{p} (\Delta a_j(t))^2$$ (Δは時間差分)

観測モデルは係数が時変の自己回帰モデルで，システムモデルによって時変ＡＲ係数 $\mathbf{a}_t$ の滑らかな時間変化が記述される．滑らかさはシステムノイズの分散 τ^2 によって決まる．

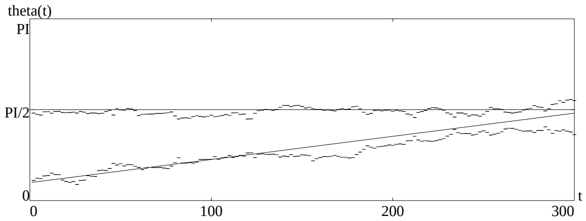
システムモデルによって表されるＡＲ係数の時間的滑らかさは，パワースペクトルの小さな変化を意味している．しかし，ピーク周波数が滑らかに変化するという記述がなされている訳ではない．また状態推定によって得られるのはＡＲ係数の変化の様子であってピークの変化ではなく，ピーク周波数の時間変化を得るためには固有値問題を解く必要がある．

時変係数ＡＲモデルは線形・ガウスモデルなので，線形ガウスモデルに対するフィルタリング手法として有名なカルマンフィルタによって，状態推定が可能である．計算量としては，ＡＲ次数 p の２乗のオーダー (高速カルマンフィルタを用いれば p のオーダー) と，非常に少ない．

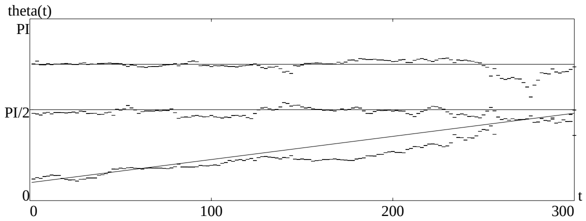
時変係数ＡＲモデルによるピーク推定結果



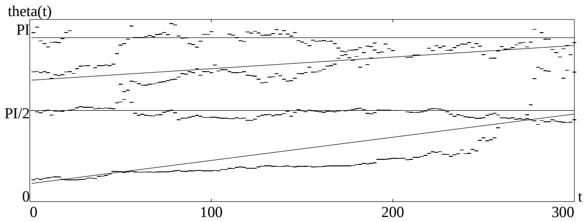
（シミュレーションデータ１）



（シミュレーションデータ２）



（シミュレーションデータ３）



（シミュレーションデータ４）

カルマンフィルタ Kalman(1960)

線形状態空間モデル：

$$\begin{aligned} y_t &= \mathbf{h}_t\, \mathbf{x}_t + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2) \\ \mathbf{x}_t &= F\, \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}_t,\ \ \mathbf{w}_t \sim N(0,Q) \end{aligned}$$

…観測モデル
…システムモデル

平均ベクトルと分散共分散行列＝ガウス分布：

分布	平均ベクトル	分散共分散行列
$p(\mathbf{x}_t \vert Y_{t-1})$	$\mathbf{x}_{t\vert t-1}$	$\mathbf{V}_{t\vert t-1}$
$p(\mathbf{x}_t \vert Y_t)$	$\mathbf{x}_{t\vert t}$	$\mathbf{V}_{t\vert t}$

１期先予測： $p(\mathbf{x}_t|Y_{t-1})$

$$\mathbf{x}_{t|t-1} = F\, \mathbf{x}_{t-1|t-1}$$ …システムモデルによる予測

$$\mathbf{V}_{t|t-1} = F\, \mathbf{V}_{t-1|t-1}\, F^T + Q$$ …予測による分散の増大

ろ波： $p(\mathbf{x}_t|Y_t)$

$$K_t = \mathbf{V}_{t|t-1}\, \mathbf{H}_t^T \Big[\mathbf{h}_t\, \mathbf{V}_{t|t-1}\, \mathbf{h}_t^T + \sigma^2\Big]^{-1}$$ …カルマンゲイン

$$\mathbf{x}_{t|t} = \mathbf{x}_{t|t-1} + K_t \left(y_t - \mathbf{h}_t\, \mathbf{x}_{t|t-1}\right)$$ …予測誤差に基づく修正

$$\mathbf{V}_{t|t} = (I - K_t\, \mathbf{h}_t)\, \mathbf{V}_{t|t-1}$$ …観測による分散の減少

線形ガウスモデルでは，状態推定で求まる分布が全てガウスになる．ガウス分布は平均と分散の二つのパラメータで完全に決まるので，これらの値のみを用いて状態推定が可能である．より正確には，状態はベクトルであるので，平均ベクトルと分散共分散行列のみを用いる．

１期先予測の分布は，１時刻前のろ波の分布から計算される．１期先予測の平均ベクトルおよび分散共分散行列を求める式では，システムモデルにより平均ベクトルの予測が行われ，また予測により分散は増大することになる．

またろ波の平均ベクトルおよび分散共分散行列を求める式では，まずカルマンゲインとよばれるベクトル K_n を計算する．これを使って，平均ベクトルは予測誤差に基づく修正が加えられ，分散共分散行列は観測を行ったことによる分散の減少がなされる．

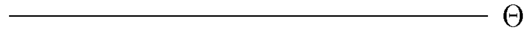
粒子による非ガウス分布の近似

$p(\Theta_t|Y_t)$：密度関数

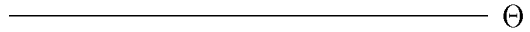
$F(\Theta_t|Y_t)$：分布関数

１期先予測

$p(\Theta_{t-1}|Y_{t-1})$：１時刻前のろ波分布



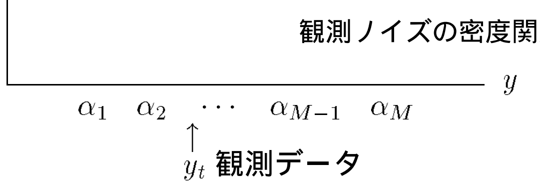
$\Downarrow$ システムノイズを印加



$p(\Theta_t|Y_{t-1})$：１期先予測の分布

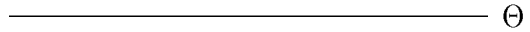
各粒子による予測

= 各粒子の尤度



ろ波

$p(\Theta_t|Y_{t-1})$：尤度による重み付け



$\Downarrow$ リサンプリング

尤度の大きな粒子が多く選ばれる

$p(\Theta_t|Y_t)$：ろ波の分布

等確率粒子

非ガウス分布を粒子により近似することは，各粒子が等確率を持つような経験分布関数によって近似を行うことである．１時刻前のろ波の粒子にシステムノイズを印加することにより，１期先予測の分布の粒子が求まる．これらの各粒子によりデータ y の予測を行い，予測の良さとして各粒子の尤度が求まる．この尤度にもとづき，リサンプリングによりろ波の粒子が求められる．リサンプリングでは，尤度の大きな粒子がより多く選ばれる．

ＡＲ（２）のパワースペクトル

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= (1 - a_1 z - a_2 z^2) y_t \qquad\qquad z \text{ :Backward shift operator}\\ &= (1 - re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta}) y_t\end{aligned}$$

$$\varepsilon_t \longrightarrow \boxed{\frac{1}{(1 - re^{i\theta} z)(1 - re^{-i\theta} z)}} \longrightarrow y_t$$

ＡＲ（$2m$）

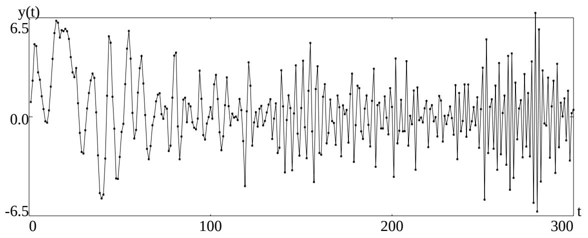
$$\varepsilon_t = \prod_{k=1}^{m} (1 - r_k e^{i\theta_k})(1 - r_k e^{-i\theta_k}) y_t$$

$$\varepsilon_t \longrightarrow \boxed{\frac{1}{(1-r_1 e^{i\theta_1}\ z)(\ \ )^*}} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{(1-r_2 e^{i\theta_2}\ z)(\ \ )^*}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{\frac{1}{(1-r_m e^{i\theta_m}\ z)(\ \ )^*}} \longrightarrow y_t$$

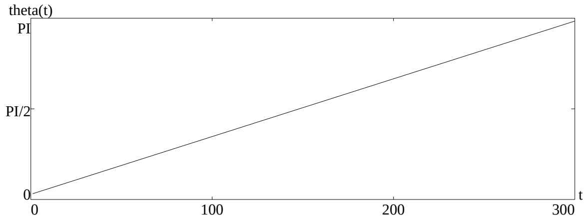
AR(2) が複素共役な特性根を持つ場合には，パワースペクトルは一つのピークを持ち，その周波数が特性根の指数部 θ と一致する．特性根 (の逆数) の大きさ $r(|r| < 1)$ は，ピークのバンド幅に対応し，r が大きい程鋭いピークとなる．

時変ピーク周波数モデルは，AR(2) を直列接続したときの，各 AR(2) のピーク周波数を状態ベクトルとして持つようにモデル化し，これらを直接推定するものである．ピーク周波数 θ_k とバンド幅 r_k から AR 係数を計算する式は，非線形となっている．(AR(2) では $a_1 = 2r\cos\theta, a_2 = -r^2$)

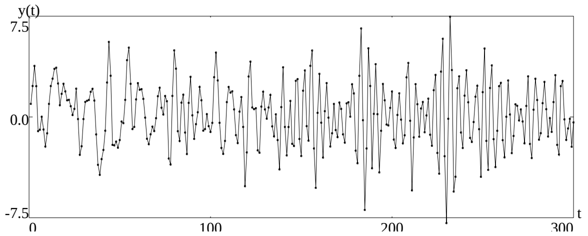
シミュレーションデータ



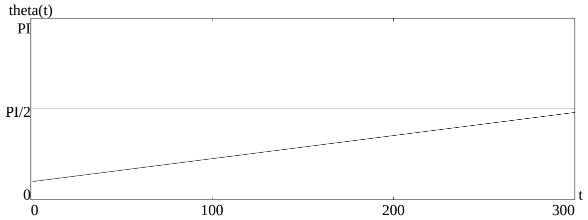
シミュレーションデータ 1



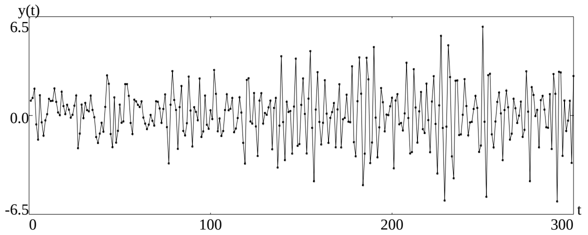
データ 1 の時変ピーク周波数



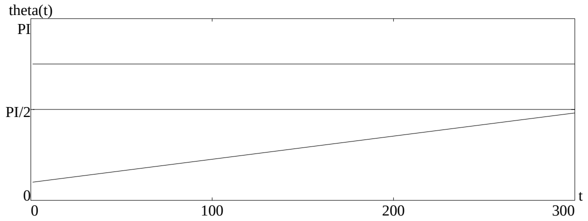
シミュレーションデータ 2



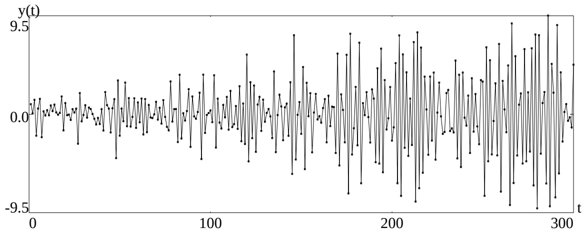
データ 2 の時変ピーク周波数



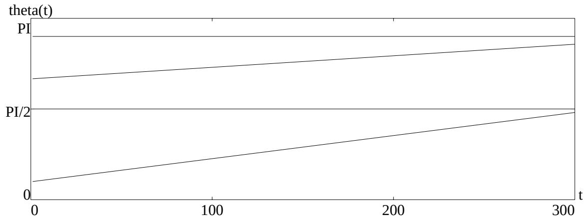
シミュレーションデータ 3



データ 3 の時変ピーク周波数

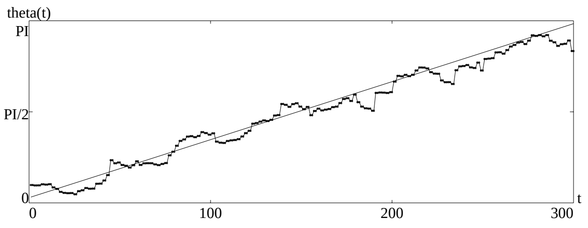


シミュレーションデータ 4

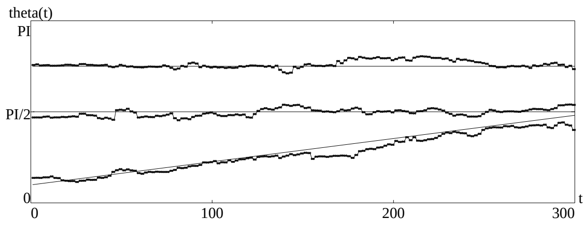


データ 4 の時変ピーク周波数

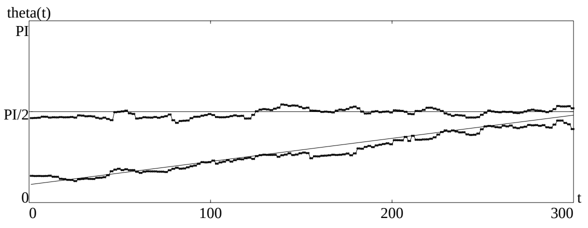
時変ピーク周波数モデルの推定結果



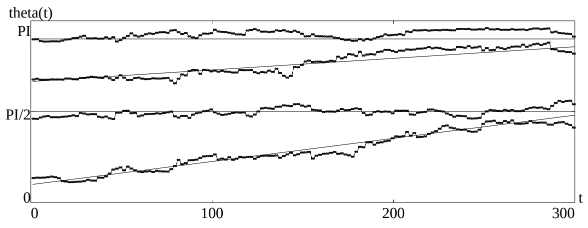
ピーク周波数の推定結果（データ１）



ピーク周波数の推定結果（データ３）



ピーク周波数の推定結果（データ２）



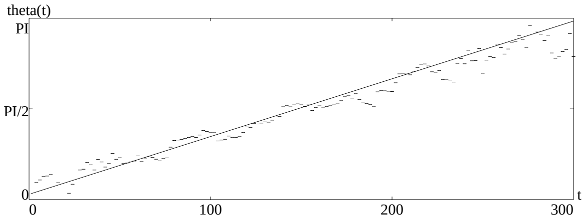
ピーク周波数の推定結果（データ４）

推定されたピーク周波数（分布のメジアン）をプロットしたのが，上の図である．各データとも，時変ピーク周波数の真値の周りに推定値が得られているのがわかる．

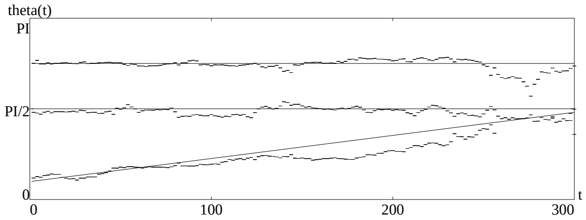
推定には，観測ノイズの分散 σ^2 を既知として，システムノイズの分散 τ^2 のいくつかの候補について尤度を計算し，候補のうち尤度の一番大きなものをシステムノイズ分散の推定値 $\hat{\tau}^2$ とした．

またピーク数については１から５までを試した．各ピーク数において得られたＡＩＣの値を比較し，ＡＩＣの最も小さいピーク数を選んだ．その結果，真のピーク数に一致するモデルが，全てのデータについて得られた．

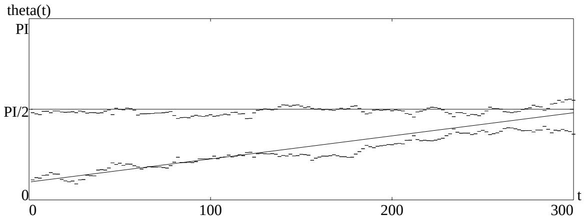
時変係数ＡＲモデルによるピーク推定結果



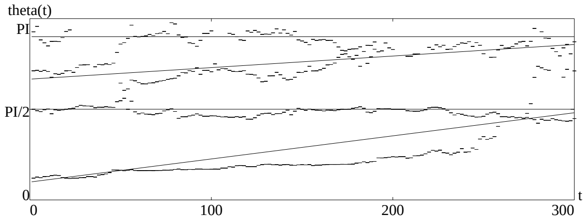
ピーク周波数の推定結果 (データ１)



ピーク周波数の推定結果 (データ３)



ピーク周波数の推定結果 (データ２)



ピーク周波数の推定結果 (データ４)

時変係数 AR モデルで推定された時変 AR 係数 (の分布の平均) から，特性方程式の根を固有値問題を解くことによって求め，根の指数部 (ピーク周波数) をプロットしたのが上の図である．モデルの定義から， AR 係数に時間的連続性が仮定されているが，ピーク周波数には時間的連続性が明示的には分からないので，各時刻ごとに独立にプロットしてある．

結果をみると，特にピーク数が多くなった場合で，隣接するピークの周波数が近くなってきた時の推定結果が悪いのが顕著である．また時刻によっては，固有値問題の解法によって実数根が得られてしまい，ピーク周波数 (＝複素根の指数部) が求められないところもある．これは，時変係数 AR モデルが必ずしも共役複素根を持つような AR 係数を推定するようには設計されていないからと考えられる．

シミュレーション結果の比較

ＡＩＣの値，推定された分散 τ^2，および次数

モデル	時変ピーク			時変係数		
	AIC	$\hat{\tau}^2$	$\hat{m}$	AIC	$\hat{\tau}^2$	$\hat{p}$
データ１	819.03	0.9×10^{-1}	1	835.56	1.0×10^{-2}	2
データ２	815.96	0.3×10^{-1}	2	831.70	1.0×10^{-3}	4
データ３	829.56	0.3×10^{-1}	3	853.43	1.0×10^{-3}	6
データ４	840.89	0.4×10^{-1}	4	943.51	1.0×10^{-3}	5
				†948.34	1.0×10^{-3}	8

†…真の次数

推定されたピーク周波数の平均２乗誤差

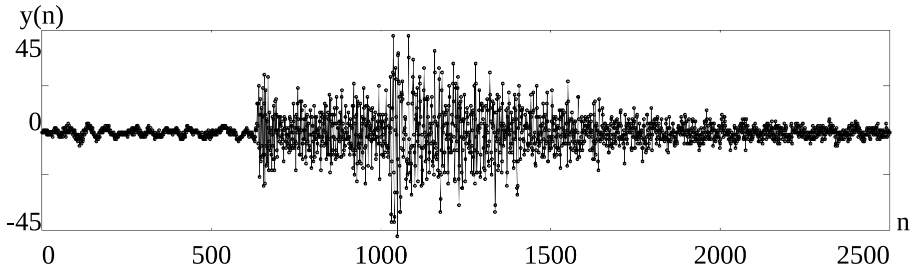
モデル	時変ピーク	時変係数
データ１	0.2196×10^{-1}	0.2913×10^{-1}
データ２	0.6031×10^{-2}	0.1359×10^{-1}
データ３	0.6162×10^{-2}	0.1656×10^{-1}
データ４	0.8006×10^{-2}	†0.3364×10^{-1}

†…真の次数

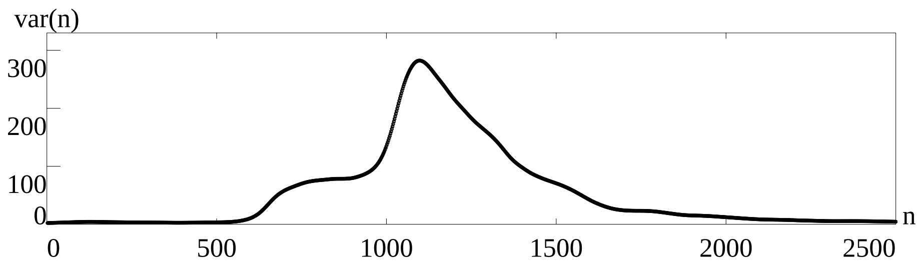
ＡＩＣによる比較では，全てのデータについて時変ピーク周波数モデルの方が良いという結果が得られた．またＡＩＣ最小化により決定されたモデルの次数をみると，時変ピーク周波数モデルにおいては全てのデータについて真の次数と一致し，時変係数 AR モデルにおいても一つのデータを除き一致した．

推定したピーク周波数と，データを生成した時に使った真のピーク周波数との平均２乗誤差の比較も行った．なお時変係数 AR モデルにおいては，推定された AR 係数から，固有値問題を解いて特性方程式の根を求めて，その指数部をピーク周波数とした．比較した結果をみると，全てのデータにおいて時変ピーク周波数モデルの方が良い値となっていることが分かる．

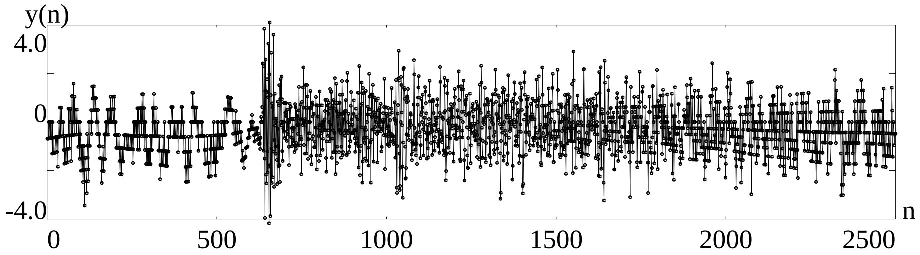
地震動データ



原データ



時変分散モデルにより推定された分散の時間変化



分散標準化後の地震動データ

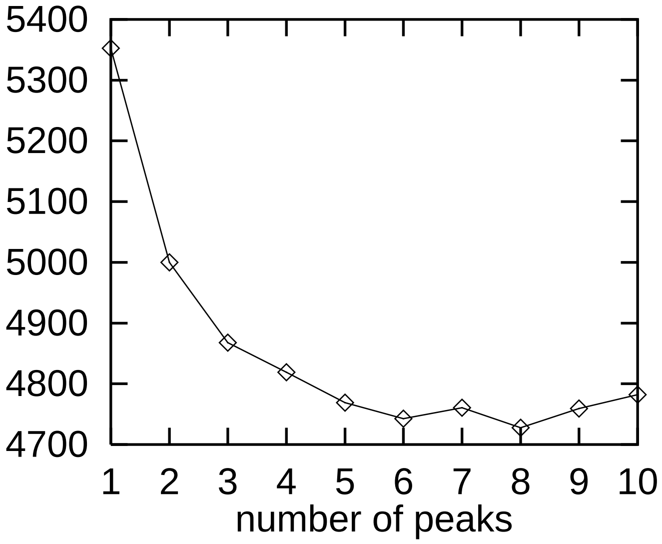
地震の振動を計測したデータについて解析を行う．解析にあたって，地震の原データは，分散が時間的に変化している．しかし解析に用いるモデルは，観測ノイズの分散は一定と仮定している．よって，分散を一定の値に変換した系列について，モデルをあてはめるのが適していると考えられる．

分散を標準化 (一定の分散) にするために，時変分散モデル (Kitagawa 1985) により分散の時間変化を推定した．推定された時変分散の平方根 (= 時変標準偏差) で原データを割ることで，分散の値が 1 に標準化された系列が得られる．以降の解析では，この分散標準化後のデータを用いる．

地震動データのＡＩＣ

地震動データに対する時変ピーク周波数モデルのＡＩＣ

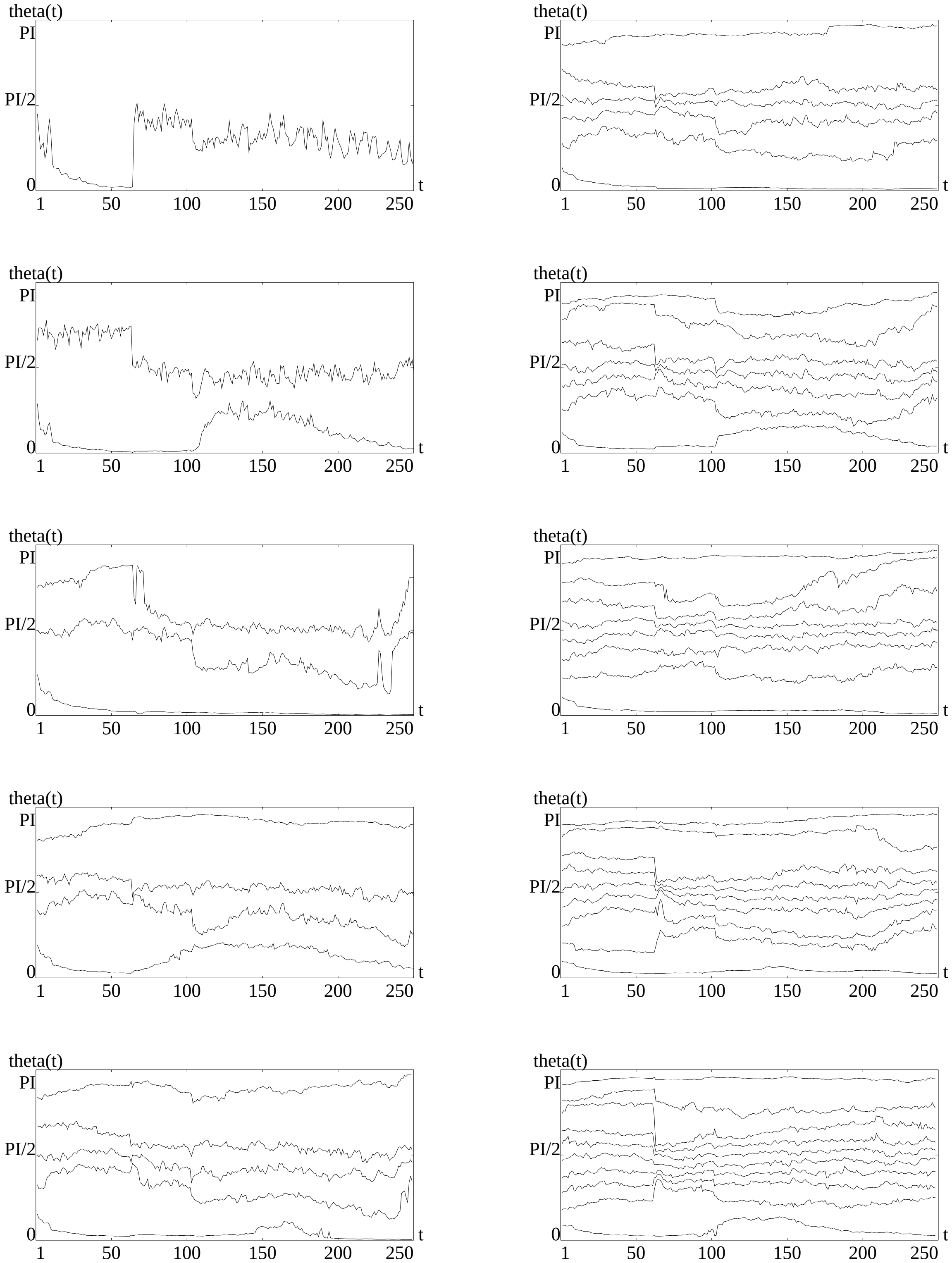
ピーク数	ＡＩＣ	ピーク数	ＡＩＣ
1	5352.60	6	4742.74
2	5000.14	7	4760.50
3	4867.70	8	4727.46
4	4819.20	9	4759.50
5	4769.12	10	4782.22



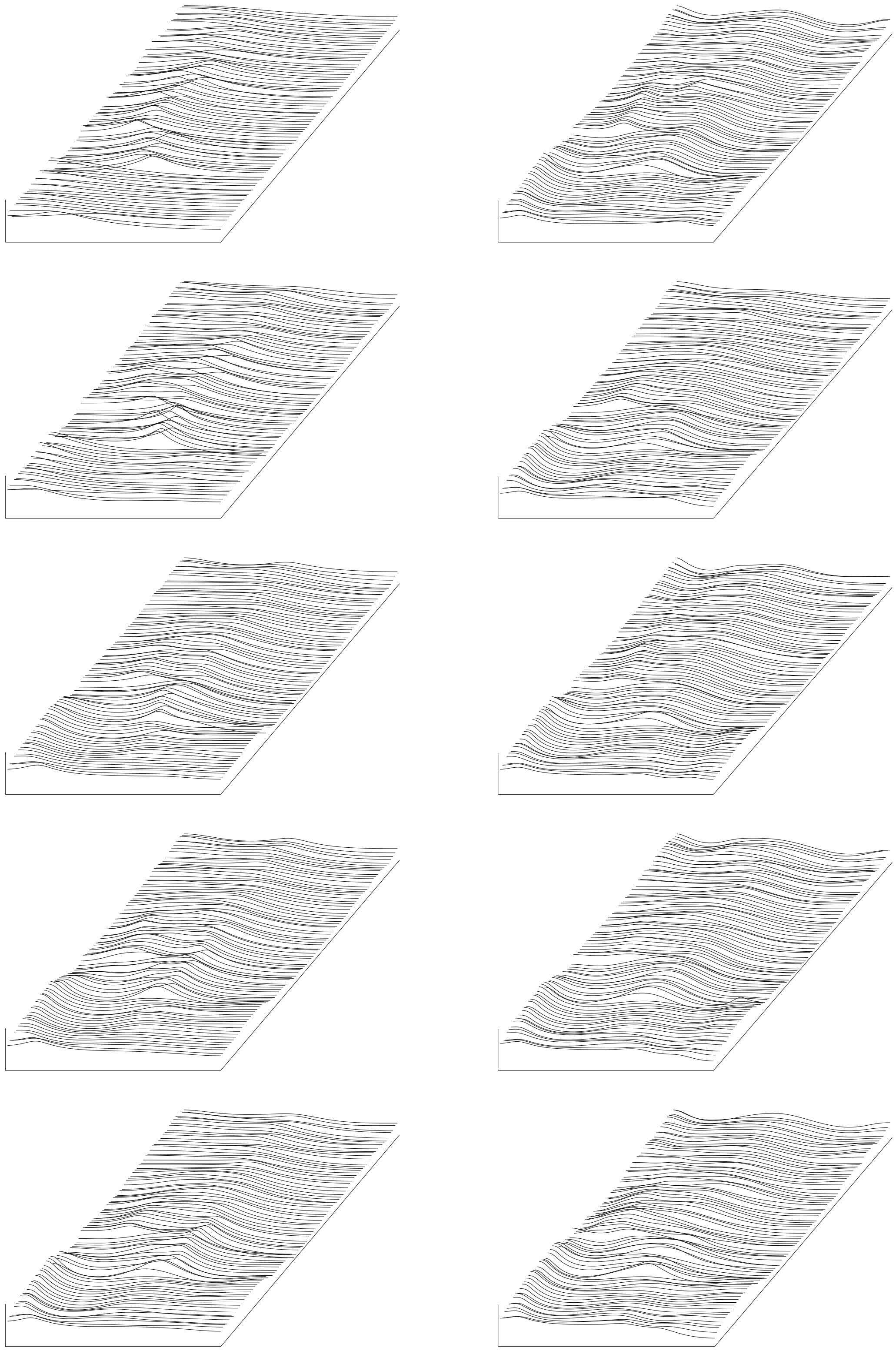
地震動データに対する時変ピーク周波数モデルのＡＩＣのプロット

　時変ピーク周波数モデルを，地震動のデータにあてはめて得られたＡＩＣを，表とグラフに示した．これはピーク数を１から１０までについて，それぞれＡＩＣの値を求めた結果である．グラフをみると，ピーク数が８のときにＡＩＣが最小値となっていることがわかる．

地震動データの時変ピーク周波数の推定結果



地震動データの時変パワースペクトル推定結果



地震動データの時変バンド幅の推定結果