遺伝的操作を使った構造時変モデルによる非定常時系列解析

Nonstationary time series analysis by using time-varying structure model with aid of genetic operation

生駒 哲一　　　前田 博
Norikazu IKOMA and Hiroshi MAEDA
九州工業大学 工学部 電気工学科
Dept. of Computer Engineering, Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology

Abstract Time-varying structure model with respect to autoregressive order has been proposed. The aim of the model is to estimate time-varying power spectra that have both smooth change of spectrum parametrized by time-varying spectral peaks and drastic change of the structure of spectrum represented by change of the number of peaks, which corresponds to time-varying autoregressive order. Monte Carlo filtering and genetic algorithm are used to estimate the peaks and the number of peaks respectively. Numerical simulation shows the result of estimation.

Key words: genetic algorithm, model identification, data analysis

1 はじめに

パワースペクトルのピークを推定することで，時系列データの持つ周期性を知ることができる．定常時系列の場合には線形予測法としてスペクトルの推定方法が確立されている．スペクトルの性質が時間的に変化するような場合には，非定常スペクトルを推定する方法として，自己回帰係数が時間的に変化するモデル [8] などが提案されている．またピーク周波数やバンド幅を直接推定する方法も提案されている [4]．

本研究ではこれらをさらに進めて，非定常スペクトルの時間的発展が，ＡＲ係数の変化だけでなく，次数をも変化させるような大きな場合を扱う．これは振動の場合には，固有振動の数が増減することを意味し，振動する対象の構造的変化や，新たな信号の重畳などがその原因として想定される．

このような観測データを解析して非定常スペクトルを推定する方法として，時変なピーク周波数とバンド幅とでパラメータづけされた時変係数を持つ観測モデルを持ち，ピーク周波数とバンド幅が時間的に滑らかに変化するシステムモデルを基本とする，構造が時間的に変化するモデルを提案する．モデルの推定には，モンテカルロフィルタ [6] という非ガウス型フィルタを用いる．

モデルの構造変化は，次のように実現される．スペクトルピークを予め考えられる最大の数を常に格納しておき，そのうちどれを使用するかをビット列によって決めることにする．このビット列も時間的に変化し，その変化は遺伝的操作から成るシステムモデルで記述されるものとする．ビット列中の１の個数がピークの個数の対応するので，システムモデルで記述したダイナミクスに従って，ピークの個数すなわち AR 次数が適応的に変化することになる．

以下では，モデルの定義とパラメータ推定方法を示し，簡単なシミュレーションによるモデルの動作確認の結果を報告する．

2 モデル

時刻 t における観測値 y_t は連続値を取るものとし，N 個のの観測系列を次のように表すことにする．

$$Y_N = \{y_1, y_2, \cdots, y_N\} \tag{1}$$

観測系列は振動する物体や音響信号などの測定で，そのパワースペクトルにはピークが複数あって，それらが時間的変化するような特性を持つと仮定する．またピークの数が必ずしも時間的に一定とは限らない場合を扱う．なおピークの数は，最大でも M 個であると仮定する．

このような観測系列から時変スペクトルを推定する方法として，観測モデルとシステムモデルから成る，構造が時間的に変化するモデルを以下で提案する．

2.1 観測モデル

次のような観測モデルを仮定する．

$$y_t = \sum_{j=1}^{2m_t} a_j(\mathbf{X}_t, \mathrm{g}_t) y_{t-j} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \tag{2}$$

観測モデルは自己回帰モデルの形をしており，その自己回帰係数は時変な状態ベクトル $\mathbf{X}_t$ および M 桁のビット列

$$\begin{aligned} \mathrm{g}_t &= [g_{1,t},\ g_{2,t},\ \cdots,\ g_{M,t}]^T \quad (3) \\ & \quad \text{(ただし }{}^T\text{ は転置)} \\ g_{k,t} &\in \{0, 1\}, \qquad k = 1, 2, \cdots, M \end{aligned}$$

をパラメータとして持つ．

また観測モデルの自己回帰次数 $2m_t$ は時間的に変化し，次のように時刻 t におけるビット列 g_t の１の個数により決まるものとする．

$$m_t = \sum_{k=1}^{M} g_{k,t} \tag{4}$$

観測モデル (2) の，時刻 t における瞬間パワースペクトルは次のように導出できる ($\omega \in [0, \pi]$ は角周波数)．

$$p(\omega, t) = \frac{\sigma^2}{\left| 1 - \sum_{j=1}^{2m_t} a_j(\mathbf{X}_t, \mathrm{g}_t) e^{-ij\omega} \right|^2} \tag{5}$$

パワースペクトルの時間変化は，状態ベクトル $\mathbf{X}_t$ とビット列 g_t によって表されている．このうちビット列が自己回帰次数 $2m_t$ を決めていることから，スペクトル構造の大きな変化がビット列の変化によって表され，同一構造の下での微細な変化が状態ベクトルの変化によって表される．よって状態ベクトルの変化に滑らかさを仮定することでスペクトルの滑らかな時間変化が記述でき，またビット列の変化を適切に仮定することでスペクトル構造の時間変化を記述することができる．

2.2　システムモデル

状態ベクトルとビット列の時間的変化を，次のシステムモデルにより記述する．

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{W}_t \tag{6}$$

$$\mathrm{g}_t = f_{GA}(\mathrm{g}_{t-1} | p_c, p_m) \tag{7}$$

ここで $\mathbf{W}_t$ はシステムノイズのベクトルである．また $f_{GA}(\mathrm{g}_{t-1}|p_c, p_m)$ は，遺伝的アルゴリズム [2] における交叉および突然変異の遺伝的操作をビット列 g_{t-1} に対して行う関数で，交叉確率 p_c ，突然変異確率 p_m にてビット列に交叉および突然変異を確率的に起こすものとする．この際，交叉および突然変異の起こるビットは，ビット列内から等確率で選ばれるものとする．

状態ベクトルは，次のようなピーク周波数ベクトル Θ_t とピークバンド幅ベクトル $\mathbf{r}_t$ とに分けられるものとする．

$$\mathbf{X}_t = \left[{\Theta_t}^T, \ {\mathbf{r}_t}^T \right]^T \tag{8}$$

$$\Theta_t = \left[\theta_{1,t}, \ \theta_{2,t}, \ \cdots, \theta_{M,t} \right]^T \tag{9}$$

$$\mathbf{r}_t = \left[r_{1,t}, \ r_{2,t}, \ \cdots, r_{M,t} \right]^T \tag{10}$$

またシステムノイズも，状態ベクトルに対応して，次のように分けられる．

$$\mathbf{W}_t = \left[\mathbf{W}_{\Theta,t}^T, \ {\mathbf{W}_{\mathbf{r},t}}^T \right]^T \tag{11}$$

$$\mathbf{W}_{\Theta,t} = \left[w_{\theta_1,t}, \ w_{\theta_2,t}, \ \cdots, w_{\theta_M,t} \right]^T \tag{12}$$

$$\mathbf{W}_{\mathbf{r},t} = \left[w_{r_1,t}, \ w_{r_2,t}, \ \cdots, w_{r_M,t} \right]^T \tag{13}$$

先に述べた状態ベクトルの滑らかさは，システムノイズ $\mathbf{W}_t$ の仮定の仕方よって決めることができる．また遺伝的操作 $f_{GA}(\cdot)$ は，ビット列の変化の仕方を定義していることになる．本研究では，システムノイズとして次のような正規分布を仮定する．

$$\mathbf{W}_{\Theta,t} \sim N(\mathbf{0}, \mathrm{diag}(\tau_\theta^2)) \tag{14}$$

$$\mathbf{W}_{\mathbf{r},t} \sim N(\mathbf{0}, \mathrm{diag}(\tau_r^2)) \tag{15}$$

ここで分散共分散行列の $\mathrm{diag}(\tau^2)$ は，対角要素が τ^2 の対角行列であることを示す．

2.3　自己回帰係数の計算

観測モデル (2) における時変な自己回帰係数 $a_j(\mathbf{X}_t, \mathrm{g}_t)$ は，状態ベクトル $\mathbf{X}_t$ とビット列 g_t とから決まる係数 $\{c_{j,t} | j = 1, \cdots, 2m_t\}$ によって，次のように計算されるものとする．

$$a_j(\mathbf{X}_t, \mathrm{g}_t) = (-1)^j \left(\sum_{i_1, \cdots, i_j} c_{i_1,t} \cdots c_{i_j,t} \right) \tag{16}$$

ここで $\sum$ の範囲 $i_1, \cdots, i_j$ については，各 $i_k, (k = 1, \cdots, j)$ が $1 \sim 2m_t$ のうちで異なる値をとり，そのような全ての組合せについての和をとることを意味する．

係数 $\{c_{j,t} | j = 1, \cdots, 2m_t\}$ は，次のように決めるものとする．まず，ビット列が 1 となっている箇所 k (すなわち $g_{k,t} = 1$) に対応するピーク周波数 $\theta_{k,t}$ およびバンド幅 $r_{k,t}$ から共役複素数 $r_{k,t} e^{\pm i \theta_{k,t}}$ を構成する．これにより $2m_t$ 個の複素数が得られるので，これを適当に $c_{j,t}$ に割り当てる．式 (16) は，この割り当て方に対して不変であるので，割り当ては任意に行って良い．

このように自己回帰係数を決める根拠は次の通りである．まず $g_{k,t} = 1$ の $r_{k,t} e^{\pm i \theta_{k,t}}$ は，観測モデルの特性方程式の根になっている．2 次の自己回帰モデル $\mathrm{AR}(2)$ の場合には，特性根の指数部 $\theta_{k,t}$ はパワースペクトルのピーク周波数に一致し，特性根の大きさ $r_{k,t}$ はピークのバンド幅となっている．よって，上記のように自己回帰係数を決めることで，観測モデルを $\mathrm{AR}(2)$ が直列に接続されたシステムと見なして，各 $\mathrm{AR}(2)$ のピーク周波数とバンド幅を推定することができる．

3　モデルの推定

観測系列 (1) から，上述した提案モデルにより，時変パワースペクトルを推定する方法について述べる．推定されるパラメータは，時刻 $t = 1, 2, \cdots, N$ についての状態ベクトル $\mathbf{X}_t$ (ピーク周波数 Θ_t とバンド幅 $\mathbf{r}_t$) およびビット列 g_t である．これらのパラメータは後で述べる方法で推定されるが，推定にあたって次の超パラメータの値が与えられる必要がある．

超パラメータとしては，状態ベクトルおよびビット列の初期値 $\mathbf{X}_0$ および g_0，遺伝的操作における交叉および突然変異の確率 p_c および p_m，そしてシステムノイズの分散 τ_θ^2 および τ_r^2 である．これら超パラメータをまとめて ϑ で表すことにする．なお超パラメータの値は，後で述べるように，尤度に基づいて決めることもできる．

3.1　モンテカルロフィルタ

パラメータの推定は，状態ベクトルについてはモンテカルロフィルタ [6] を用いる．ビット列については，遺伝

的操作 (7) がやや特殊な式ではあるものの，基本的にはモンテカルロフィルタに基づいて行われる．モンテカルロフィルタは，元来非線形非ガウス型モデルのフィルタリング手法として提案されたものである．その特徴は，非ガウス分布を，分布に従う粒子で近似する点で，「１期先予測」および「ろ波」の計算を，各粒子に対する計算によって行うことができる．この近似により，従来の近似方法である区分的線形関数等による近似 [5] と比べ，その計算量が指数関数のオーダーから粒子数のオーダーへと大幅に減った．

モンテカルロフィルタによるパラメータ推定は，以下のように行う．状態ベクトル $\mathbf{X}_t$ およびビット列 g_t の組 $\mathbf{x}_t = (\mathbf{X}_t, \mathrm{g}_t)$ の値を持つ粒子を P 個用意し，以下に示す「１期先予測」と「ろ波」の分布を求める手続きを交互に繰り返すことにより，フィルタリングを実行する．

3.2　１期先予測分布の計算

まず，時刻 $t-1$ における「ろ波」の粒子を

$$\{\mathbf{f}_{1,t-1},\ \mathbf{f}_{2,t-1},\ \cdots,\mathbf{f}_{P,t-1}\} \tag{17}$$

と表す．これらの粒子で経験分布関数が決まるが，この分布関数が時刻 $t-1$ のろ波の分布 $p(\mathbf{x}_{t-1}|Y_{t-1})$ の分布関数 $F(\mathbf{x}_{t-1}|Y_{t-1})$ を近似している．

次にシステムモデル (6) (7) に基づいて，各粒子にシステムノイズと遺伝的操作を加える．こうして「１期先予測」の粒子が得られ，これを

$$\{\mathbf{p}_{1,t},\ \mathbf{p}_{2,t},\ \cdots,\mathbf{p}_{P,t}\} \tag{18}$$

と表す．これらの粒子で決まる経験分布関数が，１期先予測の分布 $p(\mathbf{x}_t|Y_{t-1})$ の分布関数 $F(\mathbf{x}_t|Y_{t-1})$ を近似するものであることが [6] で示されている．

3.3　ろ波分布の計算

時刻 t におけるろ波の分布 $p(\mathbf{x}_t|Y_t)$ は，以下のように求められる．まず各粒子の尤度 $\alpha_{j,t}$ を

$$\alpha_{j,t} = p(y_t|\mathbf{p}_{j,t}) \tag{19}$$

により計算する．これは粒子の持つ状態およびビット列の値から自己回帰係数を計算し，y_t の予測を行ってその誤差を観測ノイズの正規分布に代入することで得られる．

そして各粒子の尤度に基づき，次のような確率でリサンプリングを行って，ろ波の粒子を得る．

$$\mathbf{f}_{j,t} = \begin{cases} \mathbf{p}_{1,t} & \text{確率} \quad \alpha_{1,t}/\sum_k \alpha_{k,t} \\ \mathbf{p}_{2,t} & \text{確率} \quad \alpha_{2,t}/\sum_k \alpha_{k,t} \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ \mathbf{p}_{P,t} & \text{確率} \quad \alpha_{P,t}/\sum_k \alpha_{k,t} \end{cases} \tag{20}$$

これらの粒子で決まる経験分布関数が，ろ波の分布 $p(\mathbf{x}_t|Y_t)$ の分布関数 $F(\mathbf{x}_t|Y_t)$ を近似するものであることも [6] で示されている．

3.4　尤度の計算

モンテカルロフィルタにより，モデルの対数尤度 $l(\vartheta)$ を次のように近似的に求めることができる．

$$\begin{aligned} l(\vartheta) &= \sum_{t=1}^{N} \log p(y_t|Y_{t-1}) \\ &\simeq \sum_{t=1}^{N} \log \left(\frac{1}{P} \sum_{j=1}^{P} p(y_t|\mathbf{p}_{j,t}) \right) \end{aligned} \tag{21}$$

超パラメータ ϑ は，尤度が最大になるようなものを用いると良い [1]．ただし，モンテカルロフィルタのサンプリングには乱数が用いられるため，厳密な数値的最適化は難しい．これを回避する方法として，超パラメータ自体も状態に含めて推定する方法が提案されている [7]．

3.5　遺伝的操作の使用

モンテカルロフィルタの粒子を用いた計算方法が，遺伝的アルゴリズムに類似なことが指摘されている [3]．システムノイズを加えることが突然変異に対応しリサンプリングを行うことが選択に対応するので，交叉の遺伝的操作を除けば，各観測時刻ごとに遺伝的アルゴリズムの１回の遺伝的操作を行っていることとほぼ等しい．ただし注意すべきなのは，遺伝的アルゴリズムではひたすら繰り返し遺伝的操作を行って目的関数を最小にするのに対して，モンテカルロフィルタでは１回の遺伝的操作で１期先予測とろ波を行って，観測 Y_t が与えられた下での状態の条件付き確率 $p(\mathbf{x}_t|Y_t)$ を求めている点である．

本研究では，ビット列に対するシステムモデル (7) が交叉を含むものとなっており，またビット列によって状態ベクトルの中からピークを選択して使用するようになっている．交叉の効果が得られれば，適切なピーク数の推定が期待され，またピーク周波数およびバンド幅の初期値からの速い収束も期待される．

4　シミュレーション

物理乱数を用いて図 1 のようなデータを生成した．これは，図 3 に実線で示すようにピーク周波数を変化させて生成したものである．時刻 $t=1$ から $t=150$ まではピーク数が 1 で，時刻 $t=151$ から $t=300$ ではピーク数が 2 となっている．全時刻を通して存在するピークを「ピーク 1 」と呼ぶこととし，その周波数を $\theta_1(t)$，バンド幅を $r_1(t)$ と表す．時刻 $t=151$ から現れるピークを「ピーク 2 」と呼ぶこととし，その周波数を $\theta_2(t)$，バンド幅を $r_2(t)$ と表す．各ピークの変化は
$\theta_1(t) = 0.310 + 0.004 \times t$，$r_1(t) = 0.8$ および
$\theta_2(t) = 2.944 - 0.004 \times t$，$r_2(t) = 0.5 + 0.001 \times (t-1)$
とし，ピーク 2 については時刻 $t=151$ からデータ生成に使用した．

このデータについて，提案するモデルをあてはめて得られた時変ピーク数の分布のモードを図 2 に示す．図を

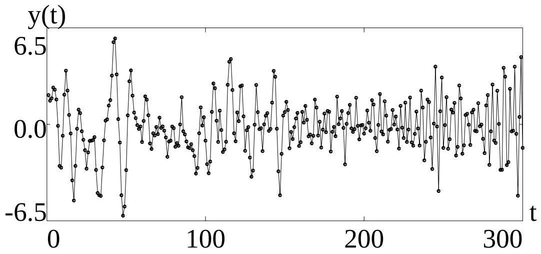

図 1: シミュレーションデータ

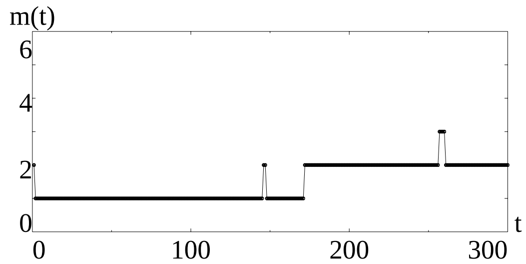

図 2: 推定された時変ピーク数 (モード)

見ると，時刻 $t = 150$ までは真のピーク数１をほぼ得ており，また時刻 $t = 151$ を過ぎてしばらくすると，ピーク数は２に変化してほぼ安定している．これは真のピーク数に一致する結果となっている．

各時刻で推定された時変ピーク数のモードと一致する粒子について，ピーク周波数の平均値を計算し，これを時変ピーク周波数の推定値とした．ピークが複数ある場合には，周波数の順に並べて，粒子間のピークの対応をとった．このようにして得られた時変ピーク周波数の推定値のプロットを図 3 に示す．図をみると，まずピーク１について，実線で示した真のピーク周波数に追従するような推定結果が得られていることが分かる．次にピーク２についても，時刻 $t = 151$ をしばらく過ぎた辺りから，真のピーク周波数に追従するような推定結果が得られている．

5　おわりに

時変スペクトルのピーク数が変化するような場合について，ピーク周波数・バンド幅とピーク数が時間変化するような構造時変モデルを提案した．ピーク周波数とバンド幅をモンテカルロフィルタに基づき複数の粒子で推定し，ピーク数を決めるビット列も粒子に格納して交叉・突然変異の遺伝的操作を行った．ビット列により粒子中のどのピークを用いるかが決まる仕組みとなっており，遺伝的操作による速い収束を期待してモデルを構成した．簡単なシミュレーションの結果では，ピークが１つから２つに増える場合について，ピーク数および周波数の追従がなされていることを報告した．

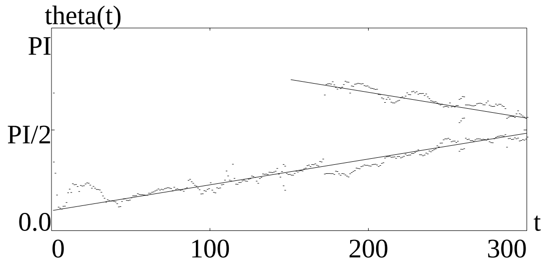

図 3: 推定された時変ピーク周波数 (平均)

謝辞　本研究は，文部省科学研究費補助金，奨励研究（Ａ）の補助を受けています．

参考文献

[1] H.Akaike: Likelihood and Bayesian procedure, Bayesian Statistics, University Press, Valencia, Spain,

[2] D.E.Goldberg: Genetic algorithm in search, optimization and machine learning, Addison-Wesley MA (1989).

[3] T.Higuchi: Monte Carlo filter using the Genetic algorithm operators, Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol.59, No.1, pp.1-23(1997).

[4] N.Ikoma: Estimation of time varying peak of power spectrum based on non-Gaussian nonlinear state space modeling, Signal Processing, Vol.49, pp.85-95(1996).

[5] G.Kitagawa: Non-Gaussian state space modeling of nonstationary time series (with discussion), Journal of the American Statisitical Assoc., Vol.82, No.400, pp.1032-1063 (1987).

[6] G.Kitagawa: Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space model, Journal of Computational and Graphical Statistics, Vol.5, pp.1-25 (1996).

[7] G.Kitagawa: A self-organizing stat-space model, Journal of the American Statistical Assoc., Vol.93, No.443, pp.1203-1215(1998).

[8] G.Kitagawa and W.Gersch: A smoothness priors time-varying AR coefficient modeling of nonstationary covariance time series, IEEE Trans. AC-30, No.1, pp.48-56(1985).

[問い合わせ先]
〒 804-8550 北九州市戸畑区仙水町１番１号
九州工業大学工学部 電気工学科 情報工学教室
生駒 哲一 (いこま のりかず)
TEL: 093-884-3216　FAX: 093-871-5835
E-mail: ikoma @comp.kyutech.ac.jp