モンテカルロフィルタによる不規則振動データの解析

広島市立大学　情報科学部

生駒哲一

1　はじめに

周期性のある現象は我々の身近に多く存在し，観測からスペクトルを推定してその周期性を知ることは信号処理の分野において重要な問題である．ここでパワースペクトルのピークは主要な周期的傾向を表すことから，ピーク周波数を知ることがスペクトル解析においては非常に重要な役割をもっている．データが定常な不規則信号の場合，自己回帰（Auto-Regressive:AR）モデルをあてはめてスペクトルを推定することが可能であり，非定常不規則信号の場合は非定常 AR モデルをあてはめることになる．

非定常 AR モデルには，データを区間に分けて，それぞれの区間に対して別々の定常 AR モデルをあてはめる局所定常 AR（Locally stationary AR:LAR）モデル Ozaki and Tong(1975) [13], Kitagawa and Akaike(1978) [10]，ベイズの方法により AR 係数に時間変化の滑らかさを導入した時変係数 AR（Time-Varying Coefficient AR:TVCAR）モデル Kitagawa(1983) [5], Kitagawa and Gersch(1985) [11] などがある．これら非定常 AR モデルを用いることにより，時変スペクトルを推定できる．

非定常スペクトル解析の別の方法として，時変ピーク周波数（Time-Varying Peak frequencies of Power spectrum:TVPP）モデルを著者は提案している [4]．TVPP モデルは非定常 AR モデルのひとつで，スペクトルの滑らかさとして特性根の変化に事前分布を入れたベイズモデルである．これは，パワースペクトルのピークの時間変化に滑らかさを導入することに相当している．このような事前分布は，TVCAR モデルのように AR 係数の変化の滑らかさによりスペクトルの滑らかさを定義するものと異なり，注目しているピーク自体に滑らかさを導入する形になっている．

このように TVPP モデルは，注目すべきものであるピークの変化を直接推定できる定式化となってはいるが，その定式化ゆえにモデルに非線形要素があり，状態推定には非線形・非ガウス型フィルタリング [6] [7] が必要となる．非線形・非ガウス型フィルタリングは，次元の高い場合には計算量が組合せ的に増大することが問題であったが，北川の提案しているモンテカルロフィルタ（Monte Carlo Filter:MCF）[9] では，その問題に一つの解決を与えている．さらに自己組織型フィルタリング [8] では，状態ベクトルに分散を入れることで，時変分散の推定も可能になる方法が提案されている．

本稿では，TVPP モデルに MCF を適用し，ピーク数の多い場合のモデルの有用性を示す．これまで TVPP モデルの応用としては，時変ピーク数が 2 までで，時間不変スペクトルを併せて仮定した報告がある [4], [3] のみで，2 より多い時変ピーク数の場合は，初めての試みである．まず始めにシミュレーションにより TVPP モデルのパフォーマンスを確認し，続いてデルタ翼の非定常風洞試験データの解析結果を報告する．

2　時変ピーク周波数モデル

次のような非定常 AR モデルを考える．

$$y_t = \sum_{j=1}^{p} a_j(t) y_{t-j} + \varepsilon_t, \tag{1}$$

ここで　整数 t は時刻を表し，y_t は各時刻に観測に対応している．$\{a_j(t)|j=1,\cdots,p\}$ は時変 AR 係数であり，ノイズ項 ε_t は，平均 0 分散 σ^2 の正規分布に独立に従う確率変数である．また，AR 次数 p は偶数（$p=2m$）であるものとする．

非定常 AR モデルのパワースペクトル（瞬間スペクトル）を次のように定義する．

$$p(\omega,t) = \frac{\sigma^2}{\left|1-\sum_{j=1}^{p} a_j(t)e^{-ij\omega}\right|^2}, \tag{2}$$

ここで，$\omega \in [0,\pi]$ は 角周波数をあらわす．

$z^{-1}y_t = y_{t-1}$ のような z- 変換を導入することにより，式 (1) の特性方程式は次のように書ける

$$1-\sum_{j=1}^{p} a_j(t) z^{-j} = 0. \tag{3}$$

ただし，全ての特性根は複素共約でつぎのように表すものとする

$$\left\{ r_k(t)e^{\pm i\theta_k(t)} | k=1,\cdots,m \right\}.$$

時間変化の滑らかさを表す事前分布を，$r_k(t)$ および $\theta_k(t)$ に対して次のように導入する．

$$\begin{array}{rcl} \Delta^d r_k(t) & \sim & N(0,\mu^2), \\ \Delta^d \theta_k(t) & \sim & N(0,\tau^2), \end{array} \tag{4}$$

広島市立大学　情報科学部　情報機械システム工学科
〒731-31 広島市安佐南区沼田町大塚１５１−５
TEL：082-830-1764, FAX：082-830-1792,
E-mail：ikoma@im.hiroshima-cu.ac.jp

ここで Δ^d は次のように定義される差分オペレータである．

$$\Delta y_t \equiv y_t - y_{t-1},$$
$$\Delta^d y_t \equiv \Delta(\Delta^{d-1} y_t), \qquad d > 0.$$

TVPP モデルの TVCAR モデルとの違いは，事前分布の入れ方にある．TVPP モデルでは，式 (4) のようにピークに対して滑らかさを導入しているのに対して，TVCAR モデルでは

$$\Delta^d a_j(t) \sim N(0, \tau^2). \tag{5}$$

のように，AR 係数に対して滑らかさがある．AR 係数に対する滑らかさは，次の積分が小さいという制約を設けているのと同じである．such that

$$\int_0^{\pi} \left|\Delta^d A(\omega, t)\right|^2 d\omega = \sum_{j=1}^{p} \left|\Delta^d a_j(t)\right|^2, \tag{6}$$

ただし

$$A(\omega, t) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j(t) e^{-ij\omega}. \tag{7}$$

式 (6) 左辺が小さいということは，スペクトルの時間変化が全体的に小さいことを意味する．より具体的には，各周波数におけるパワースペクトルの値で重み付けされた値が小さいということである．これは，間接的にはピークの滑らかな変化を意味してはいるものの，ピーク周波数の変化とピーク強度の変化との区別が明確でない．その点 TVPP モデルでは，ピーク強度とピーク周波数とを，特性根の大きさおよび指数部とでそれぞれ独立に持っているため，それらの変化を直接に表現することができる．また TVPP モデルでは，注目している値であるピークを直接推定できる．

3 モンテカルロフィルタによる状態推定

TVPP モデルや TVCAR モデルの時変要素を求めるには，これらモデルを状態空間表現で表し，状態推定を行なえばよい．TVCAR モデルの場合には，線形・ガウスモデルであるので，カルマンフィルタなどの，平均と分散のみを使った線形・ガウス型フィルタリングを用いることができる．これに対し TVPP モデルのような非線形モデルや，非ガウスモデルの場合には，非線形・非ガウス型フィルタリングが必要になる．

線形・ガウスモデルの場合も非線形・非ガウスモデルの場合でも，次の一般状態空間表現により表すことができる．

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{w}_t) \\ y_t &= h(\mathbf{x}_t, \varepsilon_t) \end{aligned} \tag{8}$$

ここで, $\mathbf{x}_t$ は n- 次元状態ベクトル，$\mathbf{w}_t$ は分布 $q(\mathbf{w})$ に従う l- 次元システムノイズベクトル，そして $\mathbf{g}(\cdot,\cdot)$ は $\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^l \mapsto \mathcal{R}^n$ の関数である．また y_t は スカラーの観測値，ε_t は分布 $r(\varepsilon)$ に従うスカラーの観測ノイズ，そして $h(\cdot,\cdot)$ は $\mathcal{R}^n \times \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$ の関数である．ただし，$\varepsilon_t = h^{-1}(y_t, \mathbf{x}_t)$ となるような関数 h^{-1} が存在するものとする．

非線形・非ガウスモデルのフィルタリングとしては，2 次の項までの近似を使う拡張カルマンフィルタ，非ガウス分布のガウス和近似 [2]，非ガウス分布の数値的近似 [6], [7] などがある．非ガウス分布の数値的近似は，拡張カルマンフィルタに比べ有効性があり，ガウス和近似のようにガウス分布の数を減らすための ad.hoc な部分も少ない．

非ガウス分布の数値的近似では，ステップ関数や区分的線形関数で分布をあらわす．そのとき近似する分布の空間を微小な区間に区切ることとなり，フィルタリングの計算では各区間の畳み込みによる数値積分が計算される．よって，状態の次元が大きくなると，計算の量は指数関数的に増えることとなり，あまり大きな次元のモデルを計算することは実質的に不可能である．

この問題点を解決したのが，北川の提案している「モンテカルロフィルタ（Monte Carlo filter:MCF）」[9] で，基本的アイデアは非ガウス分布を直接近似するのではなく，分布に従う実現値を使って計算することで，計算量を組合せ的オーダから実現値数のオーダに減らす点である．またこれにより状態の次元を高くできるので，分散を状態ベクトルに組み入れて適応的に推定する自己組織型フィルタリング [8] も可能となる．

ここでは MCF について簡単に説明しておく．大きさ N の観測系列を次のように表すことにする．

$$Y_N = \{y_1, y_2, \cdots, y_N\}.$$

予測, フィルタリング, および スムージングの分布に従う実現値を，次のように表記する．

$$\begin{aligned} &\text{予測:} && \left\{\mathbf{p}_1^{(t)}, \mathbf{p}_2^{(t)}, \cdots, \mathbf{p}_M^{(t)}\right\} \sim p(\mathbf{x}_t | Y_{t-1}) \\ &\text{フィルタリング:} && \left\{\mathbf{f}_1^{(t)}, \mathbf{f}_2^{(t)}, \cdots, \mathbf{f}_M^{(t)}\right\} \sim p(\mathbf{x}_t | Y_t) \\ &\text{スムージング:} && \left\{\mathbf{s}_1^{(t)}, \mathbf{s}_2^{(t)}, \cdots, \mathbf{s}_M^{(t)}\right\} \sim p(\mathbf{x}_t | Y_{t+L}) \end{aligned}$$

ただし, 厳密な意味では "予測" とは一期先予測のことであり，また "スムージング" とは ラグ L の固定区間スムージングのことである．

これらの実現値を用いて，予測およびフィルタリングの分布の推定は次のように計算される．

<u>予測</u>:

$$\mathbf{p}_i^{(t)} = \mathbf{g}(\mathbf{f}_i^{(t-1)}, \mathbf{w}_i^{(t)}) \tag{9}$$

ただし

$$\left\{\mathbf{w}_1^{(t)}, \mathbf{w}_2^{(t)}, \cdots, \mathbf{w}_M^{(t)}\right\} \sim q(\mathbf{w}). \tag{10}$$

フィルタリング:
各実現値の尤度を次のように計算する．

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(t)} &= p(y_t|\mathbf{p}_i^{(t)}) \\ &= r\left(h^{-1}(y_t, \mathbf{p}_i^{(t)})\right). \end{aligned} \tag{11}$$

以下に従ってリサンプリンクをする．

$$\mathbf{f}_i^{(t)} = \begin{cases} \mathbf{p}_1^{(t)} & \text{with prob.} \quad \alpha_1^{(t)} / \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(t)} \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \mathbf{p}_M^{(t)} & \text{with prob.} \quad \alpha_M^{(t)} / \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(t)} \end{cases} \tag{12}$$

予測 (9) とフィルタリング (12) はお互いの条件付き確率であるから，これらを時間順に交互に適用することにより，全ての時刻における予測とフィルタリングの分布を推定することができる．またこれらの計算の過程で，モデルの尤度が次のように算出される．
対数尤度:

$$\begin{aligned} l(\vartheta) &= \sum_{t=1}^{N} \log p(y_t|Y_{t-1}) \\ &= \sum_{t=1}^{N} \log\left(\sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(t)}\right) - N\log M, \end{aligned} \tag{13}$$

ここで ϑ は，ABIC [1] で言うところの超パラメータのベクトルを表す．システムノイズや観測ノイズの分布のパラメータなどがベクトル ϑ に含まれる．

予測およびフィルタリングの結果を用いて，次のようにスムージンクを計算する．この方法は基本的には，フィルタリング過程で求めた実現値を，先行する時刻の尤度に従って並べ換えるものである [9]．
スムージング:

$$\mathbf{s}_i^{(t)} = \begin{cases} \mathbf{f}_1^{(t)} & \text{with prob.} \quad \alpha_{\mathcal{N}_L(1)}^{(t)} / \sum_{j=1}^{M} \alpha_{\mathcal{N}_L(j)}^{(t)} \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \mathbf{f}_M^{(t)} & \text{with prob.} \quad \alpha_{\mathcal{N}_L(M)}^{(t)} / \sum_{j=1}^{M} \alpha_{\mathcal{N}_L(j)}^{(t)} \end{cases}, \tag{14}$$

ここで, インデクス $\mathcal{N}_L(j)$'s $(j = 1, \cdots, M)$ は次のように再帰的に計算される．

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}_0(j) = j, \\ &\mathcal{N}_t(j) = \\ &\begin{cases} \mathcal{N}_{t-1}(1) & \text{with prob.} \quad \alpha_1^{(t)} / \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(t)} \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \mathcal{N}_{t-1}(M) & \text{with prob.} \quad \alpha_M^{(t)} / \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(t)} \end{cases} \\ &\text{for } t > 0. \end{aligned} \tag{15}$$

4 状態の初期値について

TVPP モデルでは，状態として各ピークの強度パラメータ r_k および周波数 θ_k から成るベクトルを持つ．これらは，k について互いに交換可能である．そのため，良い推定値を得るためには，状態の初期値をうまく設定する必要がある．

状態の初期値，すなわち時刻 $t = 0$ における状態の値，の設定は，まず強度パラメータ r_k については，0.8 程度の値にしておく．これは，初期的にはある程度大きなピークを検出するように仕向けるためである．次に周波数 θ_k については，角周波数の範囲 $[0, \pi]$ に均等に位置するように，ピーク数 m に応じて次のように与える．

$$\theta_k(0) = k \cdot \pi/(m+1) \tag{16}$$

また時変分散 σ^2 の初期値は，データの分散を目安にして決めるものとする．

5 シミュレーション

シミュレーションにて生成したデータに対してモンテカルロフィルタを使った TVPP モデルをあてはめ，そのパフォーマンスを確認する．ピーク数が１から４のデータを，それぞれデータ数３００で生成し，TVPP モデルをあてはめた．データ生成では，観測ノイズの分散 σ^2 および特性根の大きさ r_k は，時間的に一定とし，推定時には，これらのパラメータは未知で時変であるとした．

各データにおいて，１から５までのピーク数の TVPP モデルをあてはめ，得られた対数尤度を表 1に示す．ただしこの値は，データの最初の１１個め以降について算出したものである．その理由は，初期的なピークや分散の値がある程度落ち着くまでの間の影響を，ピーク数決定に与えないようにするためである．

表の値は，AIC などのように，平均対数尤度の推定値としての偏りを考慮していない．しかし，ピーク数１のデータを除き，対数尤度最大のピーク数（下線）がデータのピーク数と一致している．

表 1: シミュレーションデータの対数尤度

	モデルのピーク数 m				
$\hat{m}$	1	2	3	4	5
1	-459.23	<u>-455.62</u>	-456.94	-463.34	-468.49
2	-490.28	<u>-460.93</u>	-467.59	-467.39	-467.18
3	-528.55	-475.29	<u>-462.83</u>	-467.77	-465.04
4	-618.07	-534.93	-492.47	<u>-474.47</u>	-478.09

時変ピークの推定結果を，図 1 ~ 4 に示す．各図において，破線はデータ生成における真のピークを表し，折れ線（実線）が TVPP モデルによるフィルタリングの推

定結果（メジアン）を表す．推定結果をみると，各データとも時変ピークを捕えていることがわかる．

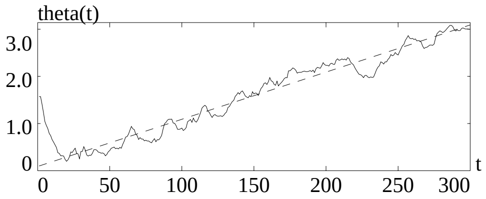

図 1: ピーク数１のシミュレーション結果

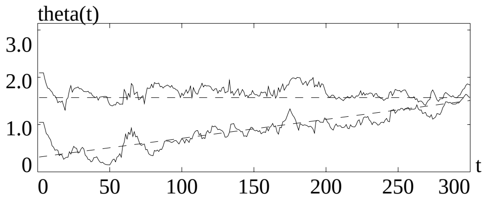

図 2: ピーク数２のシミュレーション結果

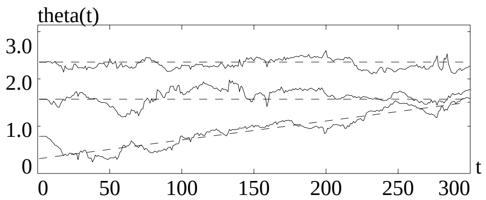

図 3: ピーク数３のシミュレーション結果

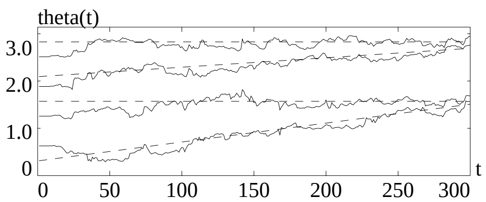

図 4: ピーク数４のシミュレーション結果

6　デルタ翼風洞試験データ解析例

非定常不規則振動のデータ解析例として，デルタ翼風洞試験データ [12] を扱う．データを図 5 に示す．このデータは，超音速航空機のフラッタ解析の目的で測定されたものである．観測はデルタ翼上のひずみゲージにより行ない，風洞の動圧を上昇させながら行なったもので，測定条件が非定常なものとなっている．動圧の上昇に伴い，翼の振動特性が変わり，それによって固有振動数が変化する．フラッタの発生は，翼の付け根を端とするいくつかの振動モードや翼のねじれの振動モードなどの周波数が共振することが，その原因であると考えられている．

[12] に従い，データの詳細について述べる．マッハ数 2.5 において，動圧を約 70[kPa] から 120[kPa] に変化させて観測し，サンプリング間隔 $T = 0.003$[秒] で測定した信号を，通過帯域 60-180[Hz] のバンドパスフィルタにかけたものである．翼はこの動圧の範囲でフラッタを起こすように，有限要素法による解析に基づいて設計されたものである．この観測では，フラッタによる翼の破壊を防ぐ機構が工夫されていて，それが機能する以前の観測までが有効なデータの範囲となり，有効データ数は $N = 1220$ ，すなわち 観測時間は 3.66[秒] である.

このデータに対して，TVPP モデルを適用し，時変ピークを推定した．推定にあたっては，局所定常性を考慮し，５データに１回のピークの変化があるものとした．まずピーク数の決定は，１から１０までのピーク数について対数尤度を計算し，それを表 2にまとめた．なおここでも，データのうち最初の１００個を除いて，対数尤度を算出した．

表 2: デルタ翼風洞試験データの対数尤度

ピーク数	対数尤度	ピーク数	対数尤度
1	-1387.01	6	-1227.10
2	-1319.10	7	-1207.98
3	-1314.32	8	-1169.08
4	-1288.72	9	-1177.10
5	-1248.95	10	-1195.16

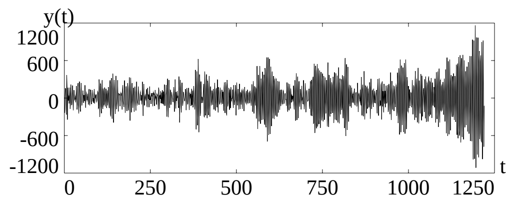

図 5: デルタ翼風洞試験データ

次に，時変ピークの推定結果について報告する．モンテカルロフィルタによる推定で得られるのは，各時刻におけるピークの「実現値」の集まりである．この集まりが，ピーク情報の分布を表しており，各ピークの周辺分布のメジアンを，前出のシミュレーションの場合に表示した．ピーク数が少ない場合には，このような表示でその意味を把握できる．しかしピーク数の多くなった場合，

表示が煩雑になり，なおかつ周波数が隣接するピークの区別が不明確になってしまうため，周辺分布のメジアンによう表示では不十分である．

よってここでは，推定された実現値の集まりによって表されているピーク周波数を，その強度パラメータ r_k にて重み付けして得られる分布の様子を，グレースケールの濃淡画像にて表示する方法を採った．まず，対数尤度最大の，ピーク数が 8 の場合の推定結果を図 7に示す．また，各ピーク数の図を見ると，ピーク数が 4 の場合が特徴的なのでその推定結果を 図 6に示す．各図において，横が時刻・縦が角周波数で，色の濃い部分は，ピークを持つ実現値が集中していることを表す．

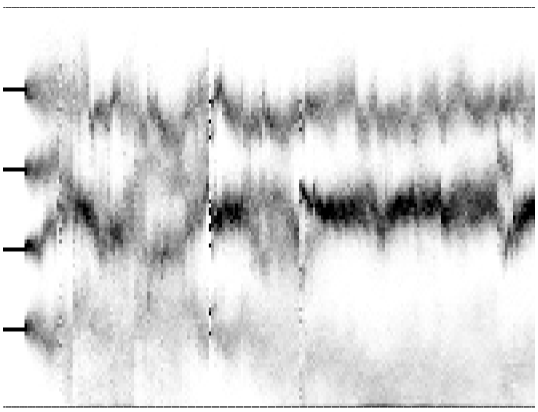

図 6: デルタ翼風洞試験データのピーク推定結果（ピーク数４）

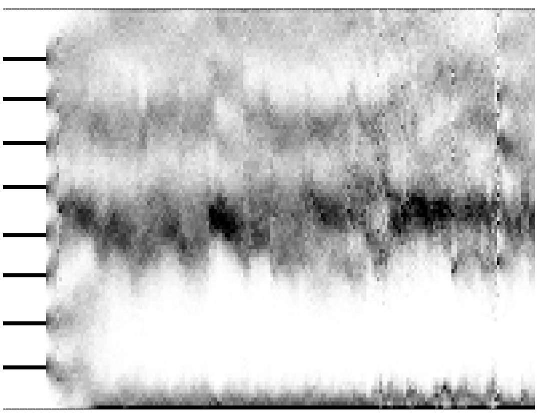

図 7: デルタ翼風洞試験データのピーク推定結果（ピーク数８）

参考文献

[1] Akaike, H. (1980). Likelihood and the Bayes procedure, *Bayesian Statistics*, Valencia, Spain: University Press.

[2] Alspach, D.L. and Sorenson, H.W. (1972). Nonlinear Bayesian Estimation Using Gaussian Sum Approximations, *IEEE Trans. A.C.*,**17**, No.4, 439-448.

[3] Ikoma, N. (1995). Nonstationary Spectral Analysis based on Peak Frequencies of Power Spectrum, Doctor thesis, The Graduate University for Advanced Studies.

[4] Ikoma, N. (1996). Estimation of Time Varying Peak of Power Spectrum based on Non-Gaussian Nonlinear State Space Modeling, *Signal Processing* **49**, 85-95.

[5] Kitagawa, G. (1983). Changing spectrum estimation, *Journal of Sound and Vibration*, **89**,No.3, 433-445.

[6] Kitagawa, G. (1987). Non-Gaussian State-Space Modeling of Nonstationary Time Series(with discussion), *Journal of the American Statistical Association*, **82**,No.400, 1032-1063.

[7] Kitagawa, G. (1991). A Nonlinear Smoothing Method for Time Series Analysis, *Statistica Sinica*, **1**, No.2, 371-388.

[8] Kitagawa, G. (1995). Self-organizing smoother for nonlinear non-Gaussian state space model, *Research Memorandom*, **578**, The Institute of Statistical Mathematics.

[9] Kitagawa, G. (1996). Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models, *Journal of Computational Graphical Statistics* **5**,No.1,1-25.

[10] Kitagawa, G. and Akaike, H. (1978). A procedure for the modeling of non-stationary time series, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **30**,Part B,351-363.

[11] Kitagawa, G. and Gersch, W. (1985). A Smoothness Priors Time-Varying AR Coefficient Modeling of Nonstationary Covariance Time Series, *IEEE Trans.* **AC-30**, No.1, 48-56.

[12] 峰岸, 安藤 他 (1992). 超音速デルタ翼の振動特性と安定限界の推定, 第 2 報, 非定常な不規則応答の局所定常時系列解析航空宇宙技術研究所報告 TR-1179.

[13] Ozaki, T. and Tong, H. (1975). On the fitting of non-stationary autoregressive models in time series analysis, *Proceeding of the 8th Hawaii International Conference on System Sciences*, 224-226.