

ピーク周波数による非定常スペクトル解析

広島市立大学 情報科学部

生駒哲一

Spectral Analysis based on Peak Frequency of Nonstationary Power Spectrum

Faculty of Information Sciences, Hiroshima City University

Norikazu IKOMA

Abstract

A new model for nonstationary spectral analysis based on peak frequency of power spectrum has been proposed. Since the model has Time-Varying Peak frequencies of Power spectrum, we have named it "TVPP model". The aim of the new model is to estimate time evolution of peak frequency of power spectrum from time series data. Since peak frequency of power spectrum is one of the most important feature of vibrational system, TVPP model can be extract useful information from time series data that might have nonstationary spectrum.

For the nonstationary spectral analysis, there is a conventional research called time-varying coefficient AR(TVCAR) model. TVCAR model can produce nonstationary spectrum from time series data. Although peak frequency is an important feature of time evolution, however, TVCAR model only has time smoothness of AR coefficient. It is not a direct representation of time smoothness with respect to peak frequency of power spectrum. The smooth changes of AR coefficient only mean a smooth changes of the shape of power spectrum, not the changes of peak frequencies. Compared with this, TVPP model directly uses peak frequency of power spectrum as the factor of continuous change instead of AR coefficient.

Through the employment of peak frequency as the factor of smooth change, TVPP model involves nonlinear formula in it. Nonlinear non-Gaussian filtering method is used to estimate the state and parameters of the model.

Simulational results show that TVPP model can estimate time evolution of peak frequencies correctly. Earthquake data and vibration of wing data are tried to analyze by TVPP model.

KeyWords: spectral analysis, nonlinear model, nonstationary time series

1 はじめに

パワースペクトルは不規則振動の周期的特性を表す有用な情報のひとつである。パワースペクトルから得られる情報の中でも特に重要なものは、ピーク周波数とその強度である。これらピーク情報の意味で「良い」パワースペクトルを求めることは、スペクトル解析の分野で特に重要な課題である。自己回帰モデル (Auto Regressive:AR モデル) によるパワースペクトルの推定は、スペクトルがいくつかのピークを持ち、かつ滑らかなものであると仮定できる場合に利用できる有効な一つの方法である。ただしそれは、不規則振動の性質が時間的に一定な、定常時系列の場合に限られる。

非定常不規則振動に対しては、局所的定常 AR モデル (Locally stationary AR:LAR モデル) Ozaki・Tong(1975), Kitagawa・Akaike(1978)、時変係数 AR モデル (Time Varying Coefficient AR:TVCAR モデル) Kitagawa(1983), Kitagawa・Gersch(1985) といったものが提案され、適用されている。これらのモデルに共通する点は、AR係数が時間的に変化するという点であり、このような特徴を持つモデルを総称して、ここでは「非定常ARモデル」と呼ぶことにしよう。各々の非定常ARモデルの違いは、時間変化するAR係数の変化の仕方の定義に表れる。例えばLARモデル Ozaki・Tong(1975), Kitagawa・Akaike(1978) では隣接する区間は独立であり、Kitagawa・Akaike(1981), Tamura(1987) は隣接する区間の滑らかさを考慮したLARモデル、TVCARモデル Kitagawa(1983), Kitagawa・Gersch(1985) はAR係数の時間的な変化に滑らかさを導入している。最後の2つの例では、滑らかさの導入により、時間的に滑らかに変化するスペクトルが推定できるようになっている。

TVCARモデルにおけるスペクトルの時間的な滑らかさの導入によって、LARモデルでは恣意的に決めていた「定常とみなせる小区間の大きさ」といった要素がなくなり、データからの客観的な推定が可能となった。しかしTVCARモデルで導入されているスペクトルの時間的な滑らかさは、そのパワーを全周波数について積分した値の時間変化が正規分布に従うという仮定であり、それは、重要な情報であるピーク周波数の時間変化についての明示的な滑らかさを意味するものではない。

本稿では、パワースペクトルのピーク周波数が時間的に滑らかに変化するモデル (Time Varying Peak frequency of Power spectrum:TVPP モデル) Ikoma(1996) について、詳しく説明する。このモデルは、パワースペクトルのピーク周波数および強度 (に関する) パラメータの時間変化について、滑らかさを直接的に仮定している。このような、推定したい時変ピーク情報に対する直接的な滑らかさの導入は、TVCARモデルの場合の間接的なものとは異なり、モデルの扱い易さや推定精度の向上が期待できるといった利点がある。また、複数あるピークをそれぞれ独立に扱える点も大きな

利点である。

本稿の構成は、次の通りである。まずはじめに基本的な考え方を説明するにあたって必要な、ARモデルとパワースペクトル、および非定常ARモデルと非定常スペクトル・その時間的滑らかさの意味について概説する。

次に、パワースペクトルのピーク周波数および強度（に関する値）について時間的滑らかさを持つ「TVPP基本モデル」を定義し、その原理を説明する。続いてTVPPモデルの状態推定、未知パラメータの推定、および次数決定の方法について説明する。TVPPモデルでは、時間的に滑らかに変化するものとして、AR係数の代わりに特性根を用いている。このような定式化では、モデルは線形ではなくなるので、非線形・非ガウス型モデルの状態推定を行なう必要がある。未知パラメータの推定は最尤法に基づく数値的最適化により行ない、次数の決定はAICに基づく方法を用いる。

そして、時間的に一定なスペクトル成分を持つように基本モデルを修正した「拡張モデル」を定義する。モデルを拡張する理由は次の通りである。本稿では、TVPPモデルの状態推定法として、非ガウス分布の数値近似を用いる方法Kitagawa(1987), Kitagawa(1991)を採用している。この状態推定法には、計算量増大がボトルネックとなり、あまり高い次元の状態ベクトルを持つことができないという欠点がある。そのためTVPP基本モデルをそのまま実データに適用するのは、データを十分に説明するだけのAR次数がとれないという点で実用的ではない。よって、ピーク数すなわち状態ベクトルの次元を変えずに、AR次数を必要なだけ大きくできるようなモデル拡張の必要が生じるのである。

最後に、TVPPモデルの適用例として、シミュレーションの結果と、地震波データの解析例を紹介する。シミュレーションではTVPPモデルの動作を確認し、その有効性を確認する。地震波データの解析では、TVCARモデルで得られる結果との比較も行なう。

2 ARモデルとスペクトル解析

2.1 ARモデルとスペクトル

不規則振動に対するスペクトル解析において、滑らかなスペクトルが推定できる有効な方法のひとつとして、AR (Auto-Regressive: 自己回帰) モデル

$$(2.1) \quad y_t = \sum_{j=1}^p a_j y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

がある。ARモデルは、いくつかのピークを持つ滑らかなパワースペクトル

$$(2.2) \quad p(\omega) = \frac{\sigma^2}{\left| 1 - \sum_{j=1}^p a_j e^{-ij\omega} \right|^2}$$

を持つ（ここで ω は角周波数である）。解析対象にそのようなスペクトルの性質が仮定ができる場合には、ARモデルによる解析は有用である。ただしARモデルの適用は、不規則振動の性質が時間的に一定な、定常時系列の場合に限られる。解析対象の振動特性が時間的に変化する場合には、いわゆる非定常スペクトル解析を必要とし、ARモデルの単純な利用だけでは有用な結果は得られない場合がほとんどである。

非定常不規則振動に対しては、局所的定常ARモデル (Locally stationary AR:LARモデル) Ozaki・Tong(1975), Kitagawa・Akaike(1978), 隣接する区間の滑らかさを考慮したLARモデル Kitagawa・Akaike(1981), Tamura(1987), および時変係数ARモデル (Time Varying Coefficient AR:TVCARモデル) Kitagawa(1983), Kitagawa・Gersch(1985) といった、AR係数の値が時間的に変化するようなモデルが提案され、適用されている。

通常のARモデル (2.1) は、定常時系列をその解析対象としているので、これを「定常ARモデル」と呼ぶことにしよう。これに対し非定常時系列をその解析対象とするTVCARモデルなどを総称して「非定常ARモデル」と呼ぶことにする。次節では、非定常ARモデルについて概説する。

2.2 非定常ARモデル

Kitagawa(1983), Kitagawa・Gersch(1985) で提案されている時変係数ARモデルは、AR係数が時間的に変化するモデルであり、非定常ARモデルのひとつとみることができる。非定常ARモデルは、一般的に次のように定義できる。

$$(2.3) \quad y_t = \sum_{j=1}^p a_j(t) y_{t-j} + \varepsilon_t$$

ここで観測ノイズ ε_t は、正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に互いに独立に従うものとしておく。

非定常ARモデルの時刻 t におけるパワースペクトルは、定常ARモデルの場合と同様に、次のように導けるものとする。

$$(2.4) \quad p(\omega, t) = \frac{\sigma^2}{\left| 1 - \sum_{j=1}^p a_j(t) e^{-ij\omega} \right|^2}$$

Kitagawa・Gersch(1985) にならってこれを、非定常ARモデルの非定常パワースペクトルと定義する。

与えられたデータから、分散 σ^2 および各時刻の時変AR係数 $\{a_j(t)|j = 1, \dots, p\}$ が推定できれば、式 (2.4) で定義される非定常スペクトルが一意に定まる。しかし推定すべきパラメータであるAR係数が各時刻ごとにあるため、パラメータ数はデータ数よりも多く、これだけでは有用な推定はできない。そこでパラメータ間に制約を設けて、その実質的な次元を減らす必要がある。制約としては、隣接する時刻のパラメータ間に、その変化の滑らかさを仮定する等が考えられる。

次節では、非定常ARモデルにおいて隣接する時刻のパラメータ間に滑らかさを仮定するものとして、Kitagawa(1983), Kitagawa・Gersch(1985) に基づく方法を概説する。

2.3 時変AR係数とスペクトルの時間的滑らかさ

非定常ARモデルにおいて、例えば Kitagawa(1983), Kitagawa・Gersch(1985) では次のような時変AR係数の滑らかさを仮定している。

$$(2.5) \quad \Delta^k a_j(t) \sim N(0, \tau^2), \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (k = 1 \text{ または } 2)$$

ただし Δ は、 $\Delta a_j(t) = a_j(t) - a_j(t-1)$, $\Delta^k = \Delta \Delta^{k-1}$ で定義される差分オペレータである。

このように導入された滑らかさは、ベイズモデルの文脈で言うところの事前分布に対応している。

AR係数に対して導入された滑らかさが、パワースペクトルの時間的変化の滑らかさとのように対応しているのかを、Kitagawa・Gersch(1985) に基づき説明する。まず、式 (2.4) の分母を $|A(\omega, t)|^2$ と表す。このとき

$$(2.6) \quad \int |A(\omega, t)|^2 d\omega = \sum_{j=1}^p (\Delta^k a_j(t))^2$$

となることから、式 (2.5) で導入された事前分布は、式 (2.6) の値、すなわちパワースペクトルを全周波数について積分した値、が小さくなるような仮定を設けているのに相当することがわかる。

3 時変ピーク周波数モデル (基本モデル)

Kitagawa(1983), Kitagawa・Gersch(1985) などで提案されている TVCAR モデルでは、事前分布に時変AR係数の時間的滑らかさを導入しており、それはパワースペクトルを全周波数について積分した値が小さいという意味で、時間的に滑らかな非定常スペクトルの性質を仮定するものであった。しかしパワースペクトルの中で特に重要な情報は、ピーク周波数とその強度であり、これらピー

ク情報の時間的滑らかさを仮定するほうが、着目している情報に対してより直接的な表現である。

本稿では、パワースペクトルのピーク周波数および強度（に関するパラメータ）の時間変化に対して、以下に述べるような方法で滑らかさを導入する。このようにして定義されるモデルを、TVPP（Time Varying Peak frequency of Power spectrum）モデルと名付ける Ikoma(1996)。また、後で述べるようなモデルの拡張を行なうので、このモデルを「基本モデル」と呼ぶことにする。

3.1 定義

次数 $p = 2m$ （偶数）の非定常ARモデルを次のように表記する。

$$(3.1) \quad \mathbf{y}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{b} \varepsilon_t$$

ここで、

$$(3.2) \quad \mathbf{y}_t = [y_t \ y_{t-1} \ \dots \ y_{t-p+1}]^T$$

$$(3.3) \quad \mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_p(t) \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

および

$$(3.4) \quad \mathbf{b} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

である。

各時刻において、特性方程式

$$(3.5) \quad |z\mathbf{I} - \mathbf{A}_t| = 0$$

の根（の逆数）が全て複素数で表せると仮定する。すなわち

$$(3.6) \quad z^{-1} = r_k(t) e^{\pm i\theta_k(t)}, \quad k = 1 \sim m.$$

ただし、ARモデルの定常性を仮定し、

$$(3.7) \quad r_k(t) < 1, \quad k = 1 \sim m$$

であるとする。

各時刻における、特性根の偏角

$$(3.8) \quad \Theta_t = [\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \dots \ \theta_m(t)]^T$$

および絶対値

$$(3.9) \quad \mathbf{R}_t = [r_1(t) \ r_2(t) \ \dots \ r_m(t)]^T$$

について、次のような時間的滑らかさを仮定する。

$$(3.10) \quad \begin{bmatrix} \Theta_t \\ \mathbf{R}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{t-1} \\ \mathbf{R}_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_t \\ \mathbf{v}_t \end{bmatrix}$$

ここで、 \mathbf{w}_t および \mathbf{v}_t は適当な分布に従うシステムノイズで、例えば $N(0, Q)$ および $N(0, P)$ に従うものとする。ただし後で述べるように、状態推定には非線形・非ガウス型フィルタリングを用いることから、観測ノイズおよびシステムノイズには非ガウス分布を仮定することもできる。

3.2 原理

式 (3.1) および (3.10) により定義されたモデルが、パワースペクトルの時変ピークを推定するモデルになっていることを以下で説明する。まず、2次の AR モデル (AR(2)) において、特性根が複素数 $re^{\pm i\theta}$ の場合を考える。このときパワースペクトル $p(\omega)$ は $\omega = \theta$ にピークを持ち、 r はそのピークの鋭さを決めるパラメータとなる。 r が 1 に近いほどピークは鋭くなる。

複数の AR(2) システムを図 1 のように直列接続したものが、TVPP 基本モデルに相当する。すなわち、式 (3.1) および (3.10) のモデルで推定されるピーク周波数および強度は、図 1 中の各々の要素におけるパワースペクトルのピークを意味している。これらのピーク情報について、ベイズの方法に基づいた時間的滑らかさを式 (3.10) にて導入している。

このようにパワースペクトルのピーク情報について時間的滑らかさを導入することの特徴は、TV-CAR モデルと比較してみると、次のようなことが挙げられる。TV-CAR モデルでは、AR 係数の空間での (分散が共通で τ^2 という制約の下での) 時間的滑らかさを仮定しているのみであって、パワースペクトルの各ピークの変化の滑らかさや、各ピークの独立性は直接的には考慮されていない。これに対し TVPP モデルでは、特性根の空間での時間的滑らかさが仮定されており、これは図 1 のような直列システムにおける各要素のパワースペクトルピークの滑らかさを直接意味している。また各ピークの滑らかさを独立に定義している。このような、パワースペクトルの推定を通して得たい情報である時変ピークについての直接的な事前分布の導入により、モデルの扱い易さや推定精度の向上が期待でき、また複数のピークをそれぞれ独立に扱えるという利点も生じる。

3.3 非線形性・未知パラメータ

TVPP モデルは、時間的に滑らかに変化するものとして、AR 係数の代わりに特性根を用いている。そのため、モデルは線形ではなくなり、状態推定には後で述べるような非線形・非ガウス型フィルタリングが必要となる。

また TVPP 基本モデルには、状態 $[\Theta_t \mathbf{R}_t]^T$ の他に、データから推定すべき未知パラメータがある。これらは観測ノイズやシステムノイズの取り方によって異なる。本稿では、観測ノイズを $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ 、システムノイズ \mathbf{w}_t および \mathbf{v}_t をそれぞれ $N(0, Q)$ および $N(0, P)$ に従うものとする。ここで、分散共分散行列はそれぞれ $Q = \text{diag}(\tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_m^2)$ 、 $P = \text{diag}(\mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_m^2)$ とする。これらが、TVPP モデルの未知パラメータであり、まとめて次のようなベクトル \mathbf{x} で表すことにする。

$$(3.11) \quad \mathbf{x} = [\sigma^2 \tau_1^2 \tau_2^2 \dots \tau_m^2 \mu_1^2 \mu_2^2 \dots \mu_m^2]^T$$

以降、未知パラメータは式 (3.11) で表される場合のみについて説明してゆく。

4 状態推定およびパラメータ推定

時刻 $t = 1$ から $t = N$ までのデータ

$$(4.1) \quad Y_N = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$$

が与えられたとする。各時刻 t におけるピークパラメータ Θ_t および \mathbf{R}_t の分布の推定値（状態の推定値）を求めることを、状態推定と呼ぶ。また本稿では、モデルに含まれる他のパラメータの値を求めることを、単にパラメータ推定と呼ぶことにする。ここでは、TVPP モデルにおける状態推定およびパラメータ推定について説明する。

4.1 状態推定

ここでは TVPP モデルにおける状態推定の概要を述べる。説明を簡単にするため、ピークパラメータが Θ_t だけのときについてのみ説明する。

時刻 t における Θ_t の推定値は、それを求めるためにどの時刻までのデータを用いるかによって、予測・ろ波・平滑化に分類される。これらは、理論的には以下の式により求められる。

[一期先予測] (one-step-ahead prediction)

$$(4.2) \quad p(\Theta_t | Y_{t-1}) = \int p(\Theta_{t-1} | Y_{t-1}) p(\Theta_t | \Theta_{t-1}) d\Theta_{t-1}$$

[ろ波] (filtering)

$$(4.3) \quad p(\Theta_t|Y_t) = \frac{p(\Theta_t|Y_{t-1})p(y_t|\Theta_t)}{p(y_t|Y_{t-1})}$$

ただし

$$(4.4) \quad p(y_t|Y_{t-1}) = \int p(\Theta_t|Y_{t-1})p(y_t|\Theta_t)d\Theta_t$$

[平滑化] (smoothing)

$$(4.5) \quad p(\Theta_t|Y_N) = \int p(\Theta_{t+1}|Y_N)p(\Theta_t|\Theta_{t+1}, Y_N)d\Theta_{t+1}$$

ただし

$$(4.6) \quad p(\Theta_t|\Theta_{t+1}, Y_N) = \begin{cases} \frac{p(\Theta_t|Y_t)p(\Theta_{t+1}|\Theta_t)}{p(\Theta_{t+1}|Y_t)} & , p(\Theta_{t+1}|Y_t) > 0 \\ 0 & , p(\Theta_{t+1}|Y_t) = 0 \end{cases}$$

これらの式のうち、平滑化で求められる推定が、利用できる全てのデータを用いているという点で、最も信頼できるものである。平滑化の推定値を求めるには。それに先立って一期先予測・ろ波の推定値を求めておく。一期先予測・ろ波の推定は、式(4.2),(4.3)を、データの時間順に交互に適用して求めることができる。

式(4.2), (4.3), および(4.5)は、モデルが線形でノイズがガウス分布の、いわゆる線形・ガウス型モデルの場合には、カルマンフィルターのアルゴリズムとして知られる平均と分散のみを用いた方法(片山(1983))で計算することができる。非ガウス分布を含む場合や、ガウス分布であっても非線形式を含む場合には一般に、カルマンフィルターの直接の適用はできない。非線形式のテイラー展開一次の項までで近似する拡張カルマンフィルター(片山(1983))などもあるが、一般的には不十分である。

非線形・非ガウス型モデルの状態推定を行なうより実用的な方法としては、ガウス分布の和により非ガウス分布を近似する方法(ガウス和近似) Alspach・Sorenson(1972)、区分的線形(または階段)関数で非ガウス分布を近似し数値積分を行なうもの(数値近似) Kitagawa(1987), Kitagawa(1991)、および非ガウス分布に従うサンプルで計算を代用するもの(モンテカルロフィルタ) Kitagawa(1993a)などがある。

本稿では、Kitagawa(1987), Kitagawa(1991)の数値近似による状態推定を用いる場合について議論する。

4.2 パラメータ推定および次数決定

TVPP モデルには、ピークパラメータ Θ_t, \mathbf{R}_t の他に、時間的に一定の値をとるパラメータ \mathbf{x} が含まれている。これらの値は、尤度関数を最大にするような数値的最適化によって求められる。数値的最適化の方法としては、ヘッセ行列の BFGS 更新公式（今野・山下 (1978)）を用いた準ニュートン法などが利用できる。尤度関数は、一期先予測・ろ波の過程で得られる (4.4) から、次のように計算される。

$$(4.7) \quad l(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{t=2m}^N \log p(y_t | Y_{t-1})$$

数値的最適化によって求められたパラメータ値を $\hat{\mathbf{x}}$ で表す。

モデルの最適次数 \hat{m} は、次式で定義される AIC を用いて、データから決定されるものとする。すなわち、AIC の値が最小となる次数 \hat{m} を最適次数とする Akaike(1974)。

$$(4.8) \quad \text{AIC} = -2l(\hat{\mathbf{x}}) + 2 \times (2m + 1)$$

5 拡張モデル

TVPP 基本モデルとその状態推定及びパラメータ推定について、これまで説明してきた。状態推定法としては、非ガウス分布の数値近似を用いる方法 Kitagawa(1987), Kitagawa(1991) を採用している。この状態推定法では、計算量増大がボトルネックとなり、あまり高い次元の状態ベクトルを持つことができない。そのため TVPP 基本モデルをそのまま実データに適用するのは、データを十分に説明するだけの AR 次数がとれないという点で、実用的ではない。

ここでは、ピーク数すなわち状態ベクトルの次元を変えずに、AR 次数を必要なだけ大きくできるように、モデルの拡張を行なう。

まず、基本モデルを次のように書き換える。

$$(5.1) \quad \mathbf{v}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{v}_{t-1} + \mathbf{b} \varepsilon_t$$

ここで、

$$(5.2) \quad \mathbf{v}_t = [v_t \ v_{t-1} \ \dots \ v_{t-2m+1}]^T$$

であり、 \mathbf{A}_t, \mathbf{b} , および ε_t はそれぞれ、式 (3.1) の場合と同じである。また \mathbf{A}_t については、式 (3.10) と同様、ピークに関する滑らかさを持つ。

次に、書き換えた基本モデルに対して、以下の式を追加する。

$$(5.3) \quad \mathbf{y}_t = \mathbf{C} \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{d} \mathbf{v}_t$$

ここで、

$$(5.4) \quad \mathbf{y}_t = [y_t \ y_{t-1} \ \dots \ y_{t-n+1}]^T$$

$$(5.5) \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

および

$$(5.6) \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

である。

なお、拡張モデルに含まれる 行列 \mathbf{C} の要素は、数値的最適化のパラメータと一緒にして求める。

拡張モデルは、時変 AR 係数 \mathbf{A}_t と同時に、時間的に不変な AR 係数 \mathbf{C} を持っている。よって拡張モデルには、これらの AR 係数を通して、時変スペクトルと時間不変スペクトルとを同時に求めることができるという特徴がある。

拡張モデルの場合の AIC は次のようになり、最適な m, n の組合せを AIC の値に従って決めることになる。

$$(5.7) \quad \text{AIC} = -2l(\hat{\mathbf{x}}) + 2 \times (2m + n + 1)$$

6 例

人工データによるシミュレーションと、地震波データの解析結果をここでは紹介する。ここで紹介する解析例では、状態推定の方法として階段関数による数値近似 Kitagawa(1987), Kitagawa(1991) を使い、モデル中の観測ノイズおよびシステムノイズには正規分布を用いた。また、TVPP モデルの時変要素にはピーク周波数 Θ_t のみを用い、ピーク強度に関する値 \mathbf{R} は時間的に不変とし、パラメータ \mathbf{x} の一つとして数値的最適化により求めた。

6.1 シミュレーション

データ 1 (図 2) データ 2 (図 3) およびデータ 3 (図 4) の 3 つの人工データを、TVPP モデルにより解析した結果を紹介する。各データはそれぞれ、図 5, 6, および 7 中の、破線のようにピーク周波数に変化するよう生成されたものである。データ 1, 2 は、それぞれ時変ピーク数が 1 および場合である。データ 3 はこれら二つとは異なり、二つあるピークのうち一つが時変で、もう一つが時間不変の場合である。

各データについて TVPP モデルを適用し、いくつかのモデル次数について AIC を算出した。得られた AIC の値を、表 7 に示す。AIC から決定されるピーク数は、全てのデータについて、データを生成した時に想定したピーク数と一致している。また時間不変 AR の次数 n は、データ 1 および 2 の場合は正しい値が決定できたが、データ 3 については少し大きい次数を選ぶ結果となった。

それぞれのデータにおいて、表に示した AIC の値にしたがってピーク数を決定し、時変ピーク周波数を推定 (ろ波) した。得られた時変ピーク周波数の分布の、メジアン, 68%, 95%, および 99% 点を、図 5, 6, および 7 中に実線で示した。また、データ 3 については、推定された時間不変スペクトルを図 8 に示した。

推定結果を見ると、どのデータについても、時変ピークを正しく推定できていることが分かる。またデータ 3 については、推定された時間不変スペクトルが、データで想定したピークを持っており、妥当な結果を得たと考えられる。

6.2 地震波データ

北川 (1993b) で紹介されている地震波データ (図 9) について、TVPP モデルによる解析を行った結果を紹介する。データは北海道で起きた地震の東西成分の振動をサンプリングタイム 0.02 秒で記録したものである。地震のないとき、P 波、および S 波でそれぞれ分散が大きく異なっているのが良く分かる。

地震波データに対して、TVPP モデルと TVCAR モデルとを適用し、非定常スペクトルを推定した。なお、どちらのモデルも観測ノイズの分散は時間的に一定であるが、地震波データは明らかに時変分散を持っている。よって TVPP モデルと TVCAR モデルを適用する前の処理として、時変分散の標準化が必要である。

分散標準化には、Kitagawa・Gersch (1985) にて提案されている時変分散推定モデルを用いた。

分散標準化されたデータを図 10 に、時変分散推定モデルにより得られた時変分散を図 11 にそれぞれ示す。

分散標準化後のデータについて TVPP モデルを適用し、得られた時変ピーク周波数を図 12 に、時間不変スペクトルを図 13 に示す。また、TVCAR モデルを適用して得られた時変パワースペクトルを図 14 に、時変スペクトルから数値的に求めた時変ピーク周波数を図 15 に示す。

TVPP モデルの定結果をみると、P 波の到着に対応して二つの時変ピーク周波数が変化し、S 波の到着では周波数が高いほうの時変ピークがさらに変化しているのがわかる。P 波の到着では、周波数が高いほうのピークは $\pi/2$ [rad] 位の角周波数であり、低いほうのピークは約 $\pi/5$ [rad] の角周波数となっている。S 波の到着では、高いほうのピークは $\pi/3$ [rad] 程度にまで下がっている。また、S 波の減衰と共に、二つのピーク周波数は徐々に元に戻ってゆくのも分かる。また時間不変スペクトルについては、角周波数 $\pi/2$ 付近に二つの主なピークを持つものが推定されている。

TCVAR モデルの推定結果をみると、P 波、S 波の到着に応じてスペクトルの様子に変化しているのが分かる。P 波の到着で、角周波数 $\pi/2$ 付近の強いピークが現われ、S 波の到着ではさらに低い周波数のピークが表れている。これらピークは、S 波の減衰と共に、地震のないときの状態に徐々に戻ってゆくのが分かる。また、地震のないときには、角周波数 $\pi/2$ 付近に弱いピークを持つようなスペクトルが推定されている。

二つのモデルによる解析結果を比較すると、まず地震のないときのスペクトルは、TVPP モデルの時間不変スペクトルと TCVAR モデルの時変スペクトルとが、角周波数 $\pi/2$ [rad] 近くにピークを持つという点で共通している。一方 TVPP モデルの時変ピーク周波数は、TVCAR モデルの推定結果とは同じではない。強いて共通点を挙げれば、TVCAR モデルで S 波のときに現われる低い周波数のピークが、TVPP モデルの二つのピークのうちの低い周波数のものに対応するのではないかと思われる。

しかしこのピークは P 波の時には既に現われており、TVCAR モデルのピークとそのように対応すると考えるよりは、地震波全体を通して共通する性質のものと考えの方が自然ではないかと思われる。同様にもう一方のピークは、P 波・S 波の特徴的な振動数と、S 波の減衰と共にシフトしてゆくピークと解釈できるとと思われる。

7 おわりに

パワースペクトルのピーク周波数が時間的に滑らかに変化するモデル TVPP モデルについて、詳しく説明した。また TVPP モデルの有用性を示すために、シミュレーションによる TVPP モデルの動作確認と、地震波の解析例を紹介した。

TVPP モデルにより、不規則振動の周期的特性を表す有用な情報中でも特に重要な、パワースペクトルのピーク周波数とその強度が、時間的変化を伴う場合にでも直接推定できるようになった。また各ピークごとに、時間的変化の滑らかさを定義できるのも、従来の TVCAR モデルなどには無い利点である。

なお、この研究の今後の課題としては、次の点が挙げられる。シミュレーションおよび実データ解析例では、非線形非ガウス型状態推定の方法として区分的線形関数による分布の数値近似を用いた。この方法では、計算量の問題から状態の次数をあまり大きく取ることができない。そのため、本稿で示した例には、ピーク数の多いものは含まれていない。実データに対して有用な解析結果を得るためには、ピーク数の大きい場合でもモデルの適用が可能であることが望ましい。よって今後は、より多いピーク数の場合を扱う非線形非ガウスフィルタ、例えばモンテカルロフィルタなどを利用したいと考えている。

参考文献

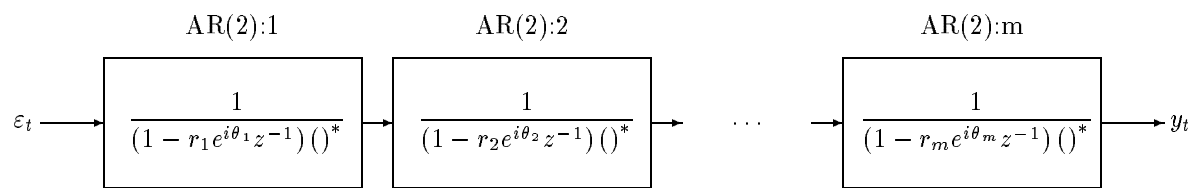
- [1] Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. A.C.*,**19**, No.6, 716-723.
- [2] Alspach, D.L. and Sorenson, H.W. (1972). Nonlinear Bayesian Estimation Using Gaussian Sum Approximations, *IEEE Trans. A.C.*,**17**, No.4, 439-448.
- [3] Ikoma, N. (1996). Estimation of Time Varying Peak of Power Spectrum based on Non-Gaussian Nonlinear State Space Modeling, *Signal Processing* **49**, No.2 .
- [4] 片山 徹 (1983). 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 第5～7章.
- [5] Kitagawa, G. and Akaike, H. (1978). A procedure for the modeling of non-stationary time series, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **30**, Part B, 351-363.
- [6] Kitagawa, G. and Akaike, H. (1981). On TIMSAC-78 , *Applied Time Series Analysis II*,

Academic Press, New York.

- [7] Kitagawa, G. (1983). Changing spectrum estimation, *Journal of Sound and Vibration*, **89**,No.3, 433-445.
- [8] Kitagawa, G. and Gersch, W. (1985). A Smoothness Priors Time-Varying AR Coefficient Modeling of Nonstationary Covariance Time Series, *IEEE Trans. A.C.*,**30**, No.1, 48-56.
- [9] Kitagawa, G. (1987). Non-Gaussian State-Space Modeling of Nonstationary Time Series (with discussion), *J. Amer. Statist. Assoc.* , **82**,No.400,1032-1063.
- [10] Kitagawa, G. (1991). A Nonlinear Smoothing Method for Time Series Analysis, *Statistica Sinica*, **1**, No.2, 371-388.
- [11] Kitagawa, G. (1993a), A Monte Carlo Filtering and Smoothing Method for Non-Gaussian Nonlinear State Space Models, *Research Memorandum*,**462**, The Institute of Statistical Mathematics,Tokyo.
- [12] 北川源四郎 (1993b). FORTRAN77 時系列解析プログラミング, 岩波書店, 第 1 章.
- [13] 今野浩, 山下浩 (1978). 非線形計画法, 日科技連, 第 9 章.
- [14] Ozaki, T. and Tong, H. (1975). On the fitting of non-stationary autoregressive models in time series analysis, *Proceeding of the 8th Hawaii International Conference on System Sciences*, 224-226.
- [15] Tamura, Y.H. (1987). An approach to the non-stationary process analysis, *Annals of The Institute of Statistical Mathematics*, **39**,No.1,B,227-241.

データ名	m	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
データ 1	1	<u>1349.43</u>	1349.97	1351.89	1353.40	1353.34	1354.98
	2	1361.43	1363.07	1367.87	1368.27	1366.31	1368.35
データ 2	1	1487.00	1473.94	1425.29	1410.49	1412.08	1409.79
	2	<u>1362.28</u>	1362.97	1365.77	1367.21	1368.94	1370.96
データ 3	1	1431.48	1419.60	1344.14	1346.05	<u>1340.68</u>	1341.59
	2	1345.74	1347.47	1345.33	1345.77	1347.24	1349.14

表 1: シミュレーションデータに対して得られた AIC の値



($*$) は、先行する ($)$ 内の共役複素数

図 1: AR(2) の直列接続 : TVPP モデルの基本部分

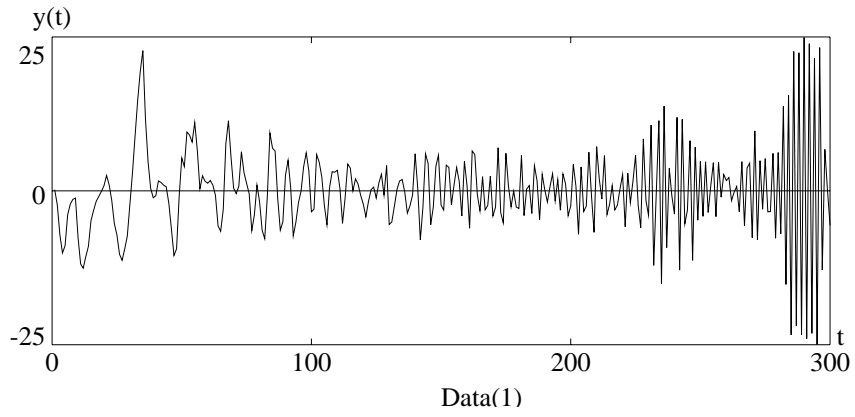


図 2: シミュレーションデータ 1

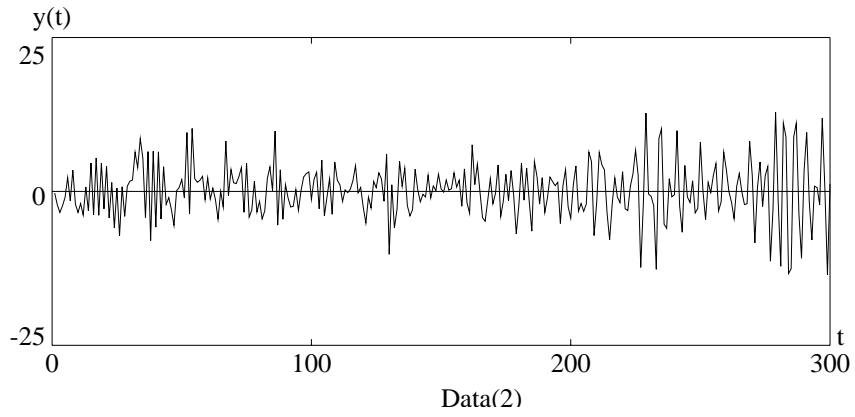


図 3: シミュレーションデータ 2

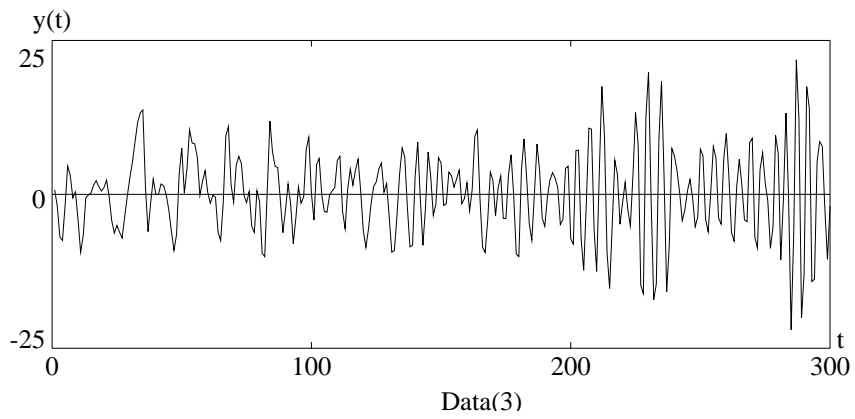


図 4: シミュレーションデータ 3

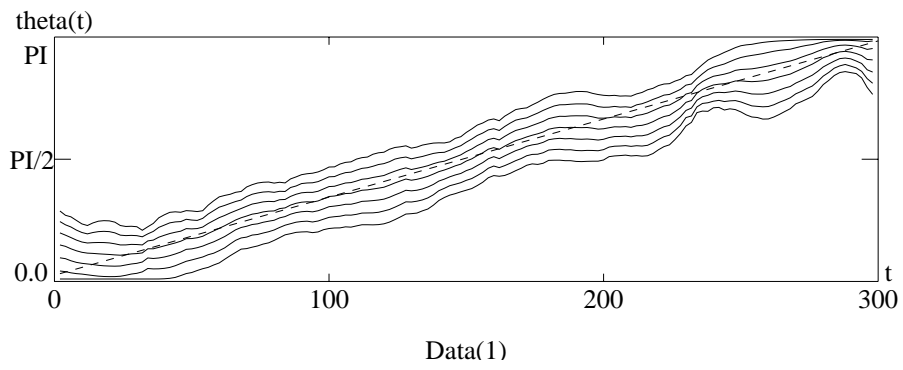


図 5: シミュレーションデータ 1 の時変ピーク周波数

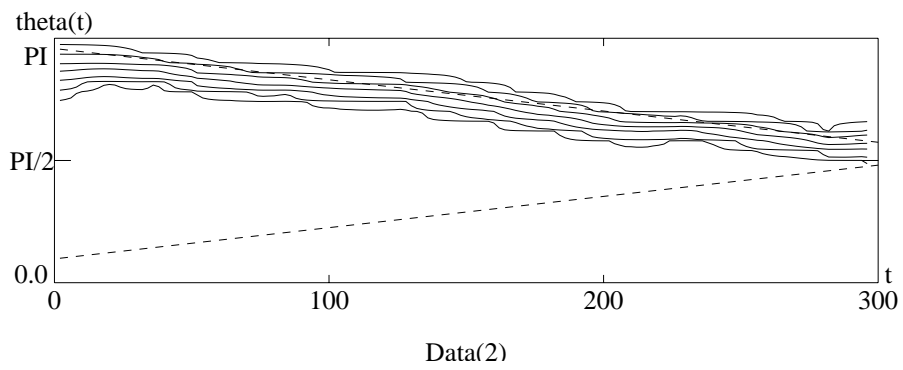
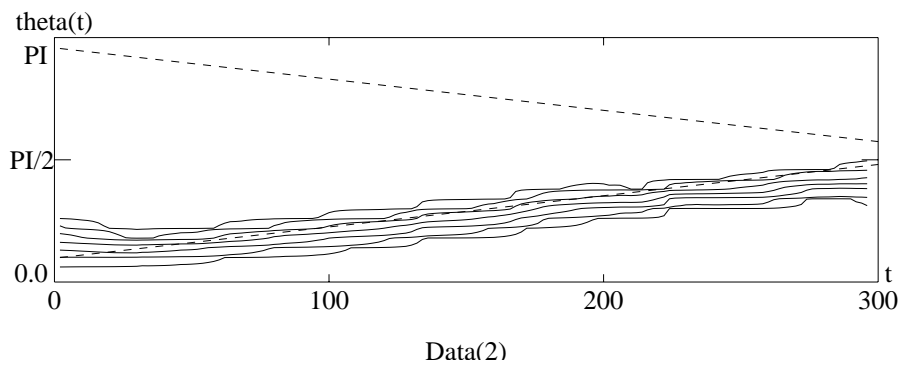


図 6: シミュレーションデータ 2 の時変ピーク周波数

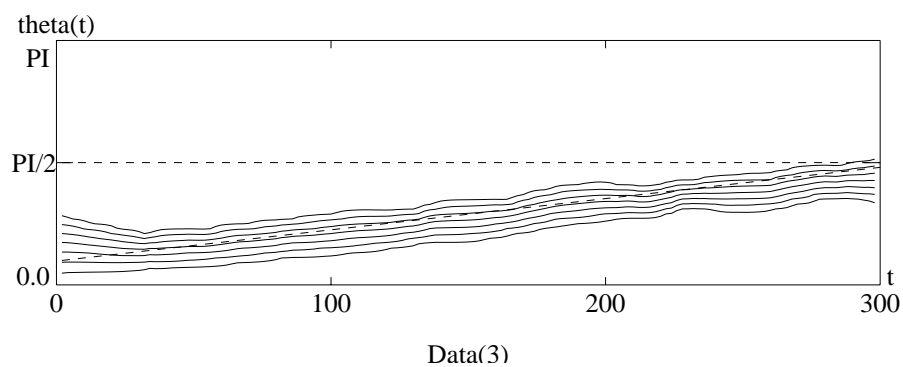


図 7: シミュレーションデータ 3 の時変ピーク周波数

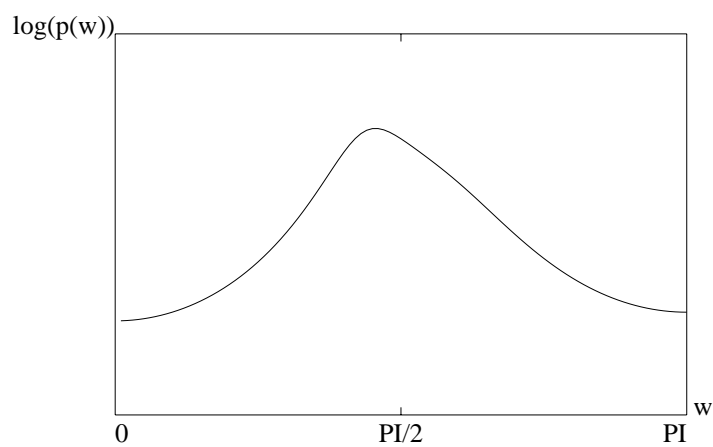


図 8: シミュレーションデータ 3 で推定された時間不変スペクトル

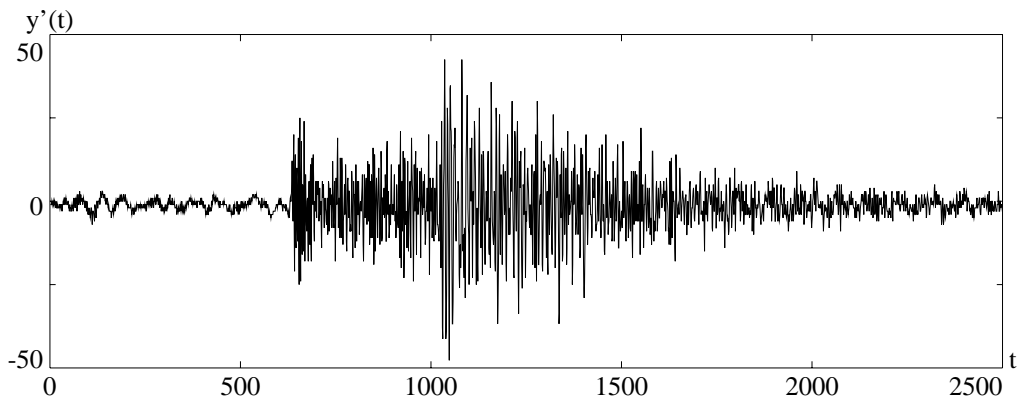


図 9: 地震波データ

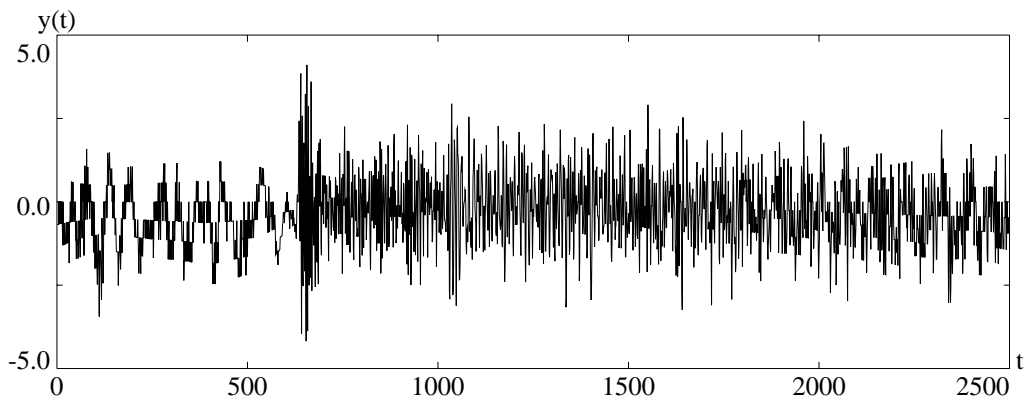


図 10: 分散標準化後の地震波データ

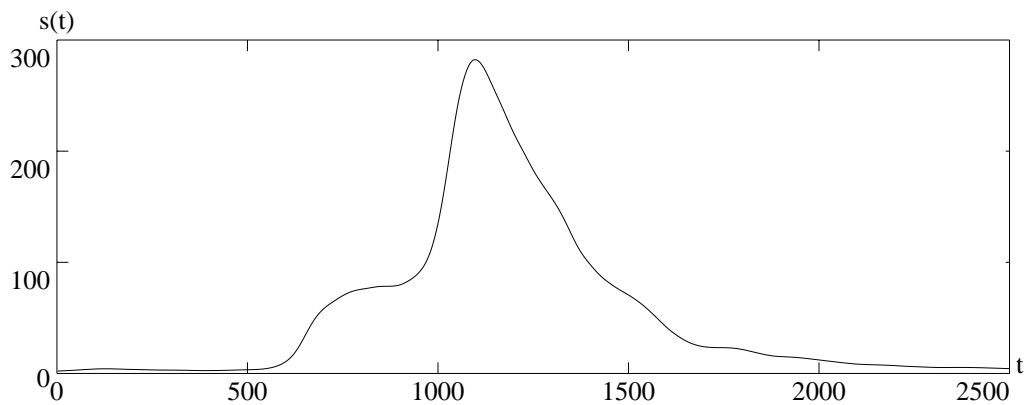


図 11: 推定された地震波データの時変分散

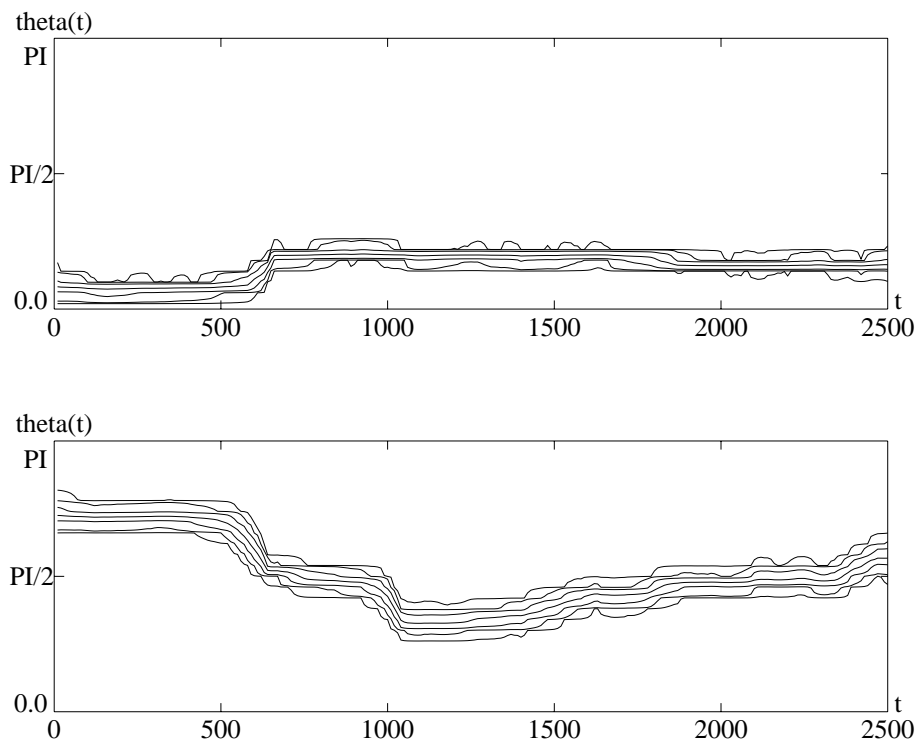


図 12: TVPP モデルにより地震波データから推定された時変ピーク周波数

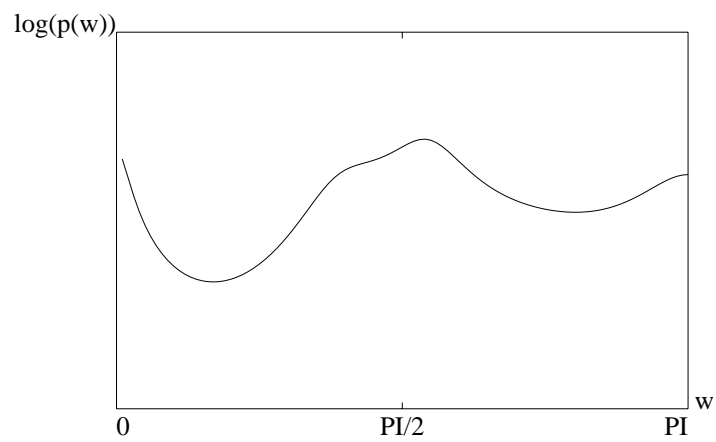


図 13: TVPP モデルにより地震波データから推定された時間不変スペクトル

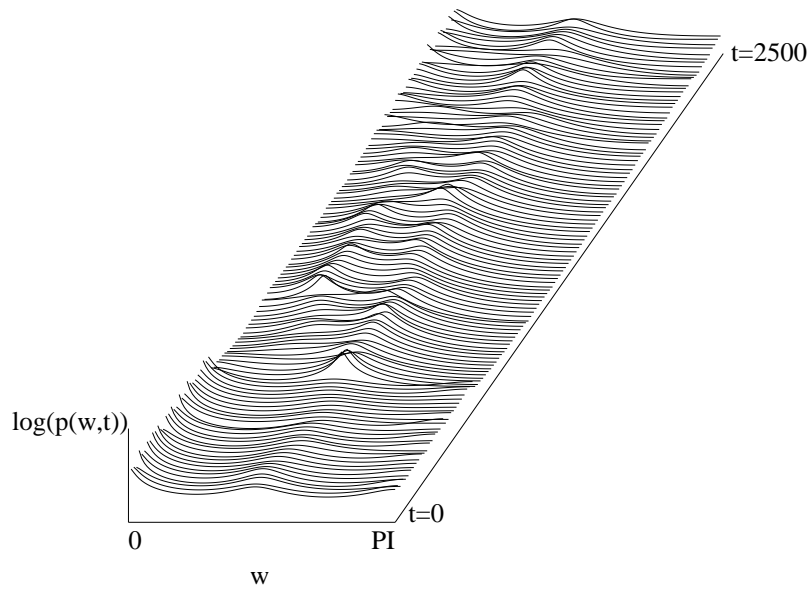


図 14: TVCAR モデルにより地震波データから推定された時変スペクトル

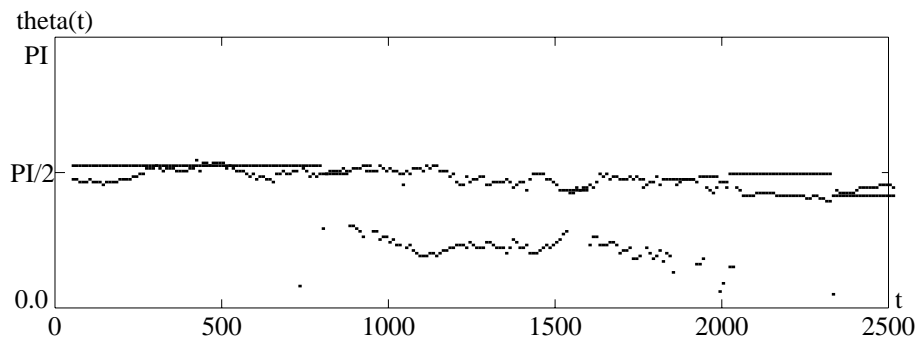


図 15: TVCAR モデルにより地震波データから推定された時変ピーク周波数